Теория игр и исследование операций

Морозов Владимир Викторович

Лит-ра:

1. А. А. Васин, В. В. Морозов — Т. игр (2005) (Каб. 546 ← Вера Васильевна ← пн, ср, пт, 14.00 – 17.00) //2 главы курса, посвященные Т. игр//
2. А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов — ИО (2008) //3я часть курса, ИО//

io.cs.msu.su ← программа, темы к/р

07/09

Глава 1. Антагонистические игры

§1. Введение

//теория принятия реш-й при некоторых неопределенностях//

//Глава 1 — Антагонистические игры (шахматы), т.е. интересы противоположны

Глава 2 — НЕ антагонистические игры (модель Курно), т.е. интересы НЕ противоположны; иерархические игры, где необходим предварит. обмен инфой

Глава 3 — Теория принятия реш-й, где есть неопред-ть, напр., в цели; модели операций; задачи ИО с распределением ресурсов//

§2. Седловые точки и реш-е антагонистической игры

центр. понятие

Г $x \in X$, $y \in Y$ ← мн-во. ∡ ф-цию $F(x,y)$, к определена на мн-ве $X \times Y$

Опр Пара $(x^\circ; y^\circ)$ наз-ся седлов. т. ф-ции F на мн-ве $X \times Y$, if вып-ся $F(x, y^\circ) \leqslant F(x^\circ, y^\circ) \leqslant F(x^\circ, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ (1)

// Минал → $z = -x^2 + y^2$ → в 3D → седлообразная форма //
// Ф-ция Лагранжа в extr задачах //

//Описание антаг. игры//

В игре есть 2 игрока:
Игрок 1 $\xrightarrow{\text{выбирает стратегию}}$ $x \in X$,
Игрок 2 $\longrightarrow$ $y \in Y$

Определим игру в норм. форме (выбор x и y игроками происходит независимо друг от друга)

Имеется ф-ция выигрыша 1го игрока $F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$ – проигрыш д/2го игрока. $F(x,y)$ определена на $X \times Y$. Цель 1го – максимизировать свой выигрыш, 2го – минимизировать свой проигрыш.

Т.е. антаг. игра задается как набор объектов $\boxed{\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle}$

Седл. т. – пара стратегий, что игрокам

невыгодно о
гий. If 1ы
то выигрыш
уменьш-ся,
Аналогичн
игрыш). Т.е
2 формализ
в игре

Опр Гово
ет реш-е, i
$X \times Y$. Реш-
знач-е
$(x^\circ, y^\circ, v = F$
Ф-ция v н
– оптималь

А что if
ректно ли
Док-м сп
Лемма 1.
(x^*, y^*), тогд

я седлов. т.
у, if вып-ся
,y^0), $\forall x \in X$,

длообразная форма //
е //

:.

. форме (выбор
т независимо

ыша 1го игрока
рыш g/2го игрока
Цель 1го –
игрыш, 2го –
оигрыш.
как набор объ-

что игрокам

невыгодно отклоняться от своих стратегий. If 1ый отклоняется от x^0 к x, то выигрыш его может только уменьш-ся, т.е. это ему невыгодно. Аналогично про 2го (увеличится проигрыш). Т.е. седл. т. – пара стратегий, ∠ формализует концепцию равновесия в игре

Опр Говорят, что антаг. игра Г имеет реш-е, if $F(x,y)$ имеет седлов. т. на $X \times Y$. Реш-м игры наз-ся тройка (x^0, y^0, $v = F(x^0, y^0)$), где (x^0, y^0) – седл. т. ф-ции F.
← знач-е в седл. т.
Ф-ция v наз-ся значением (цена) игры, (x_0, y_0) – – оптимальной стратегией.

А что if седл. т-к несколько? Корректно ли опр-ние? Да.
Док-м след. лемму.

Лемма 1. □ F имеет 2 седл. т. – (x^0, y^0) и (x^*, y^*), тогда $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

▲ $\mathcal{F}(x, y^*) \leqslant \mathcal{F}(x^*, y^*) \leqslant \mathcal{F}(x^*, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ (2)

$\underline{\mathcal{F}(x^0, y^0)} \overset{(1)}{\leqslant} \mathcal{F}(x^0, y^*) \overset{(2)}{\leqslant} \mathcal{F}(x^*, y^*) \overset{(2)}{\leqslant} \mathcal{F}(x^*, y^0) \overset{(1)}{\leqslant}$

$\underline{\overset{(1)}{\leqslant} \mathcal{F}(x^0, y^0)} \Rightarrow$ „$\leqslant$“ меняется на „=“ ■

2 **Опр** Антаг. игра Г наз-ся матричной (частный случай), if мн-во стратегий игроков конечно, т.е. $X = \{\underbrace{1, \ldots, m}_{\text{номера стратегий}}\}$, $Y = \{1, \ldots, n\}$, при этом $i \in X$, $j \in Y$ — стратегии 1го и 2го игрока, соотв.; $\mathcal{F}(i, j) = a_{ij} \Rightarrow$ выигрыш 1го образует м-цу $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$

Опр Пара (i^0, j^0) наз-ся седл. т. м-цы $\mathcal{A}$, if вып-ся $\underline{a_{i, j^0} \leqslant a_{i^0, j^0}} \leqslant a_{i^0, j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c|c|c} & \text{стратегии 2го} & \\ i^0 & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{i^0 j^0} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \text{стратегии 1го} \\ & j^0 & \end{array}$$

$a_{i^0 j^0}$ будет седл.т., if это max эл-т столбца и min эл-т строки

Примеры

1) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \bigcirc\!\!\!\!0 & \boxed{0} \\ \bigcirc\!\!\!\!0 & H \end{pmatrix}$ — седл.т. — не седл.т.

$(i^0, j^0) = (1, 1), (2, 1)$

$\vartheta = 0 \overset{\text{хоть и}}{=} a_{12}$

$\mathcal{F}(x^0, y^0) = \vartheta \overset{!}{\not\Rightarrow} (x^0, y^0)$ — седл.т.

---

2) $\mathcal{A} =$ 0 (−1

р (1)

Опр Сед

$= \mathcal{F}(x^0, y^0$

Упр.1 В

д-ть, что

Когда ∃

Когда ∃

Посмотр

игрока.

– его гара

$\vartheta = \sup\limits_{x \in X}$ И

гарант. ре

Опр Ст

мишной, i

Посмотр

аналогич

–гарант.

$,y),\ \forall x\in X,$

$y^*)\overset{(2)}{\leqslant}\mathcal{F}(x^*,y^0)\leqslant$

а „=" ∎

частный случай

матричной,

конечно,

, при этом

го игрока,

ии 1го обра-

п.т. м-цы $\mathcal{A}$,

$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

едп.т., if

п-т столбца и

троки

$,1)$

---

2) $$\mathcal{A}=\begin{tikzcd} & O & P \\ O & -1 \arrow[d] & 1 \arrow[l] \\ P & \textcircled{1} \arrow[r] & -1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$ → 1ый закладывает монету, 2ой пытается угадать

// „Орлянка" //

нет седл. т.

Опр Седл. т. — когда $\max\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y^0)=$
$=\mathcal{F}(x^0,y^0)=\min\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x^0,y)$ (1) // можно так писать, считая, что max и min соблюдаются //

Упр.1 В усл-х Л.1 (т.е. $\exists$ 2 с.т. (x^0,y^0) и (x^*,y^*)) д-ть, что (x^*,y^0) и (x^0,y^*) — тоже с.т. $\mathcal{F}$

Когда $\exists$ седл. т. у ф-ции 2х перем-х?
Когда $\exists$ реш-е антаг. игры?

Посмотрим на игру Γ с позиции 1го игрока. Пусть $x\in X$, тогда $W(x)=\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x,y)$ — его гарантированный выигрыш

$\underline{\vartheta}=\sup\limits_{x\in X}W(x)=\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x,y)$ — наилучший (max) гарант. рез-т — нижнее знач-е игры // максимизация гар. выигрыша //

Опр Стратегия $x^0\in X$ наз-ся максиминной, if $\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x^0,y)=\underline{\vartheta}$ → x реализует наилуч. гарант. рез-т

Посмотрим на игру Γ с позиции 2го, аналогично. Пусть $y\in Y$, тогда $M(y)=\sup\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y)$ — гарант. проигрыш

$\overline{\vartheta} = \inf_{y\in Y} M(y) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} \mathcal{F}(x,y)$ — верхнее знач-е игры // минимизация гар. проигрыша //

Опр Страт-я $y^\circ \in Y$ наз-ся минимаксной, if $\sup_{x\in X} \mathcal{F}(x,y^\circ) = \overline{\vartheta}$

Лемма 2 Д/∀ антаг. игры справедливо $\underline{\vartheta} \leqslant \overline{\vartheta}$.

▲ $\forall x\in X,\ \forall y\in Y \Rightarrow \overset{W(x)}{\overset{\|}{\inf_{y\in Y}\mathcal{F}(x,y)}} \leqslant \cancel{\mathcal{F}(x,y)} \leqslant$

$\leqslant \sup_{x\in X}\mathcal{F}(x,y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\vartheta} \leqslant \underbrace{\sup_{x\in X}\mathcal{F}(x,y)}_{=M(y)},\ \forall y\in Y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\vartheta} \leqslant \overline{\vartheta}$ ■

▽1.1. 1) Д/того, чтобы $\mathcal{F}$ на $X\times Y$ имела седл. т. $\Leftrightarrow$ $\max_{x\in X}\inf_{y\in Y}\mathcal{F}(x,y) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X}\mathcal{F}(x,y)$ (α)

// предполаг-ся, что max и min достиг-ся // // $\underline{\vartheta}=\overline{\vartheta}=\vartheta$ //

2)] $\mathcal{F}$ имеет седл. т., т.е. выполнено (α). Тогда, чтобы (x°, y°) была седл. т. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \inf_{y\in Y}\mathcal{F}(x^\circ,y) = \underline{\vartheta}$, $\sup_{x\in X}\mathcal{F}(x,y^\circ) = \overline{\vartheta}$ (β)

▲] (x°, y°) – с. т. $\mathcal{F} \Rightarrow$ (α), (β)

$\overline{\vartheta} = \overset{\min}{\inf_{y\in Y}} \sup_{x\in X}$

$\overset{(1)}{=} \inf_{y\in Y} \mathcal{F}(x^\circ,$

везде „="

] (α) вы

(x_0, y_0) – с.т

$\mathcal{F}(x^\circ, y^\circ) \leqslant$

$\leqslant \mathcal{F}(x^\circ, y^\circ) =$

Метод

Пользуяс

стратегии

стратегии

–мн-во в

Примеры

1) $\mathcal{F}(x,y) =$

$(x^\circ, y^\circ) = (0,$

$x\cdot 0 \equiv 0\cdot 0$

$\forall x \neq 0 \Rightarrow$

– верхнее

…иминация

…ирыша //

…я минимакс-

справедливо

$\le \cancel{\mathcal{F}(x,y)} \le$

$\times Y$ имела

$\sup\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y)$ (α)

$// \underline{\vartheta}=\overline{\vartheta}=\vartheta //$

…ыполнено (α)

…т. $\Leftrightarrow$

$=\overline{\vartheta}$ (β)

$\beta)$

$$\overline{\vartheta}=\overset{min}{\inf\limits_{y\in Y}}\sup\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y)\le\sup\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y^0)\overset{(1)}{=}\mathcal{F}(x^0,y^0)\overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=}\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x^0,y)\leqslant\overset{max}{\sup\limits_{x\in X}}\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x,y)=\underline{\vartheta}\overset{1.2}{\leqslant}\overline{\vartheta}\Rightarrow$$

везде „=“

Пусть (α) вып-но, (x^0, y^0) удовл. (β) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (x_0,y_0) – с.т. $\mathcal{F}$

максимин

минимакс

$$\underline{\mathcal{F}(x^0,y^0)}\leqslant\sup\limits_{x\in X}\mathcal{F}(x,y^0)\overset{(\beta)}{=}\overline{\vartheta}\overset{(\alpha)}{=}\underline{\vartheta}\overset{(\beta)}{=}\inf\limits_{y\in Y}\mathcal{F}(x^0,y)\leqslant$$

$\leqslant\underline{\mathcal{F}(x^0,y^0)}\Longrightarrow$ везде будет „=“ $\Rightarrow (1)$ ■

Метод нахождения седл. т-к:

Пользуясь п. 2) Т. 1.1, найдем все максимин. стратегии $X^0=\{x^0\in X\mid(\beta)\}$, минимакс. стратегии $Y^0=\{y^0\in Y\mid(\beta)\}\Rightarrow X^0\times Y^0$ – мн-во всех с.т-к ф-ции $\mathcal{F}$

Примеры

1) $\mathcal{F}(x,y)=xy$, $X=(-\infty,+\infty)$, $Y=(-\infty,+\infty)$

$(x^0,y^0)=(0,0)$

$x\cdot 0\equiv 0\cdot 0\equiv 0\cdot y$

$\forall x\ne 0\Rightarrow\inf\limits_{y\in Y}xy=-\infty$ //аналогично с sup//

!К/р (1)

2) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ Найти все с.т. – ?

$\underline{\vartheta} = \max_{1\le i\le n} \min_{1\le j\le n} a_{ij} = 2$, $i^0 = 2,3$

$\min_j a_{ij} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\max_i a_{ij} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}^T$

$\overline{\vartheta} = \min_{1\le j\le n} \max_{1\le i\le n} a_{ij} = 2$, $j^0 = 2,4$

Ответ: (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)

!К/р (2)

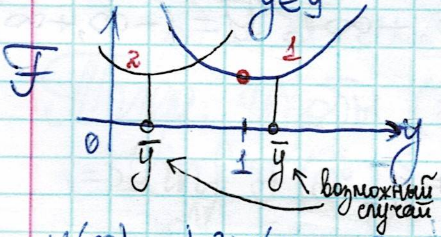
3) $F(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$

Седл. т. – ? $\overline{\vartheta} = ?$ $\underline{\vartheta} = ?$

//потом будет утв., когда max & min достиг-ся//

$\underline{\vartheta} = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y)$

$W(x) = \min_{y\in Y} F(x,y) = F(x, y(x))$



$F'_y = 0$

$-3x + 2y = 0$

$\bar{y} = 1{,}5x$

$y(x) = \begin{cases} 3x/2, & 0 \le x \le \frac{2}{3}, \\ 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$ 2й случай / 1й случай и все

.т.—?

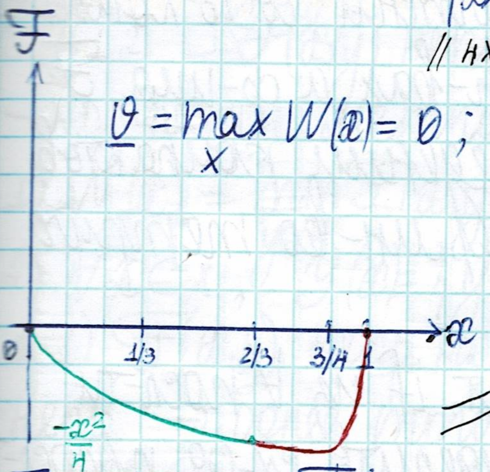
$= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}^T$

,4)

1], $Y=[0,1]$

$$W(x) = F(x, y(x)) = \begin{cases} \overset{= -x^2/4}{2x^2 - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^2}{4}}, & 0 \le x \le \frac{2}{3}, \\ 2x^2 - 3x + 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$// \ 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4 \ //$



$\underline{v} = \max\limits_{x} W(x) = 0$; $x^0 = 0, 1$

$\overline{v} = \min\limits_{y} \max\limits_{x} F(x, y)$

$M(y) = \max\limits_{x} F(x, y) =$

$= \max[F(\underline{\underline{0}}, y), F(\underline{\underline{1}}, y)]$

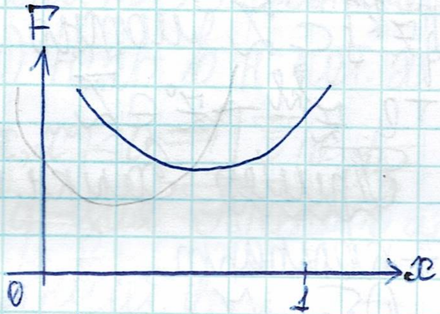
$F(0, y) = y^2$

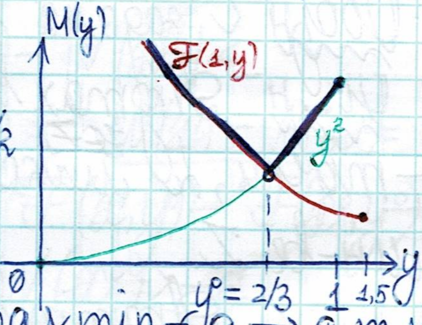
$F(1, y) = 2 - 3y + y^2$

$F'(1, y) = -3 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = 3/2$

$y^2 = 2 - 3y + y^2 \Leftrightarrow y = 2/3$

$\overline{v} = \min\limits_{y} M(y) = \frac{4}{9} > 0 \Rightarrow \max\min \ne 0 \Rightarrow$ с.т. нет





!К/р (3)

Упр. 2 $F(x, y) = -2x^2 - 3xy + y^2$

Какие усл-я необх. сформ-ть д/того,

!

чтобы ∃ минимакс. и максимин. стратегии? (Даже if седл. т. нет)

Мн-вы X и Y должны быть компактами в метрич. пр-вах, а ф-ция F — непр-й на произведении компактов.

] мн-во Z — п/мн-во метрич. пр-ва.

Опр Z — компакт, if из ∀ посл-ти $\{z^k\} \subset Z$ можно выделить сх-ся п/посл-ть, т.е. $z^{k_l} \to z^0 \in Z$

Пример Замкн. огр. мн-во в конечномер. евклид. пр-ве — компакт

] на Z задана h(z).

Обозн $\operatorname{Argmax}_{z \in Z} h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \max_{z \in Z} h(z)\}$ — точки, к-е максимизируют ф-цию h на мн-ве Z.

$$\operatorname{Argmin}_{z \in Z} h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \min_{z \in Z} h(z)\}$$

В случае двух перем-х: ∀x∈X $Y(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in Y} F(x,y)$ — мн-во минимизирующ. стратегий 2го игрока или

∀y∈Y X

максимизи

Т 1.2.] F

— компакты

1) W(x) = m

2) ∀x∈X, y

▲ 1) F(x,y)

непр. ⟹ бе

по Y. Д-м

∀ε>0 ∃

— F(x^0,y)| <

причем ра

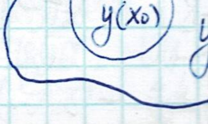
Необх. д-т

∀y∈Y(x).

$= \overset{\text{минимизир}}{F(x,y)}$ —

Аналогич

2) ∢ $x^k \to x$



максимин.
нет)
нть компак-
ф-ция F-
компактов.
метрич.

посл-ти
-ся п/посл-ть
конечномер.
евклид. пр-ве-

$h(z') = \max_{z \in Z} h(z)$
-цию h на

$h(z') = \min_{z \in Z} h(z)$

$\in X \quad Y(x)=$
минимизирующ-
ии

$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Argmax}_{x \in X} F(x,y)$ — мн-во максимизирующ. стратегий 1го игрока

Т 1.2. Пусть $F(x,y)$ непр. на $X \times Y$, где X, Y — компакты метрич. пр-в. Тогда:

1) $W(x) = \min_{y \in Y} F(x,y)$ явл-ся непр. на X;

2) $\forall x \in X$, $Y(x) = \{y(x)\}$. Тогда $y(x)$ — непр.

▲ 1) $F(x,y)$ непр. на $X \times Y \Rightarrow$ она равномерно непр. $\Rightarrow$ более того, непр. по X, равномерна по Y. Д-м, что $W(x)$ непр. в некот. x^0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : \rho(x, x^0) < \delta \Rightarrow |F(x,y) - F(x^0,y)| < \varepsilon$, $\forall y \in Y$ — ф-ция F непр. в x_0, причем равномерно относит. y.

Необх. д-ть, что $|W(x) - W(x^0)| < \varepsilon \Rightarrow$ непр-ть по Коши

$\forall y \in Y(x)$, $\forall y^0 \in Y(x^0) \Rightarrow \underline{W(x) - W(x^0)} =$

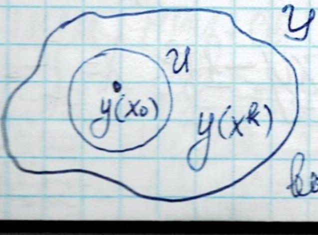
минимизирующие игреки

$= \underline{F(x,y)} - F(x^0,y^0) \leq F(x,y^0) - F(x^0,y^0) \underline{< \varepsilon}$

Аналогично $W(x) - W(x^0) > -\varepsilon$

2) Пусть $x^k \to x^0 \in X$. Д-м, что $y(x^k) \to y(x^0)$. //непр-ть по Гейне//

$\exists \ y(x^k) \not\to y(x^0)$



$y(x^k) \in \underbrace{Y \setminus U}_{\text{замкнутое, компакт}}$ — этих т-к ∞ много

замкнутое, компакт $\Rightarrow$ можно выделить сх-ся подпосл-ти

$y(x^{k_l}) \longrightarrow y' \in Y \setminus U$, $y' \neq y(x^0)$

Д-м, что $y' \in Y(x^0)$, что означает (!?)

По опр-нию, $F(x^{k_l}, \underbrace{y(x^{k_l})}_{\text{минимиз. эл-т}}) \le F(x^{k_l}, y)$, $\forall y \in Y$. Зафиксируем $\forall y$, $\lim\limits_{l\to\infty} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x^0, y') \le F(x^0, y), \forall y \in Y \Rightarrow y' \in Y(x^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (!?) ■

3

Упр.3 ∢ $M(y) = \max\limits_{x \in X} F(x,y)$. Д-ть, что в усл-х Т1.2 ф-ция $M(y)$ явл-ся непр. и вып-ся модифицированное 2ое усл-е

Док-во либо как в пред. Т, либо $M(y) = -\min\limits_{x\in X}(-F(x,y))$

Опр Антаг. игра Г наз-ся непр-й, if X, Y — параллелепипеды евклид. пр-в, а F непр. на произведении параллелепипедов

Сл Из Т1.2 $\Rightarrow$ в непр. игре $\exists$ максимин. стратегии 1го и минимакс. стр-ии 2го

Пример $F(x,y) = (1+y^2)(xy-1)^2$, $X = [-1, 1]$, $Y = (-\infty, +\infty)$

$x^0)$

означает ⑰

$)) \leq F(x^{kl}, y)$,

$\overset{\text{эл-т}}{m \Longrightarrow}$

$\to\infty$

$y' \in Y(x^0) =$

по в усл-х

и вып-ся

∇, либо

непр-й, if

- пр-в, а

лелипедов

максимин.

стр-ии его

$)^2, X = [-1, 1]$,

$x = 0$, $y(0) = 0$ — минимизирующий

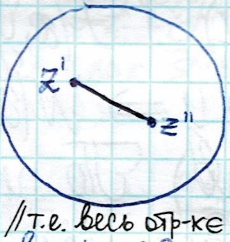
$x \neq 0$, $y(x) = \frac{1}{x}$ — разрывная

$$W(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Дост. усл-е $\exists$ ния седл. т.? Да, есть (в терминах выпукл. анализа)

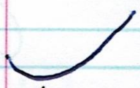
$\rceil$ Z — мн-во в конечномер. евклид. пр-ве

<u>Опр</u> Мн-во Z наз-ся вып., if $\forall z' \neq z'' \in Z$, $\forall \vartheta \in (0,1)$ выполнено $[\vartheta z' + (1-\vartheta) z''] \in Z$



//т.е. весь отр-к $\in Z$//

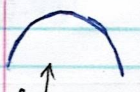
<u>Опр</u> $\rceil$ Z — вып., на Z определена $h(z)$. Ф-ция наз-ся вып., if $\forall z' \neq z''$, $\forall \vartheta \in (0,1)$ вып-ся $h(\vartheta z' + (1-\vartheta) z'') \leqslant \vartheta h(z') + (1-\vartheta) h(z'')$.



стр. вып. ф-ция

Ф-ция наз-ся строго вып., if $h(\vartheta z' + (1-\vartheta) z'') < \vartheta h(z') + (1-\vartheta) h(z'')$.

Ф-ция наз-ся вогнутой, if $h(\vartheta z' + (1-\vartheta) z'') \geqslant \vartheta h(z') + (1-\vartheta) h(z'')$



вогнутая

Ф-ция наз-ся строго вогнутой, if $h(\vartheta z' + (1-\vartheta) z'') > \vartheta h(z') + (1-\vartheta) h(z'')$

Упр.4 $h(z)=\sum\limits_{i=1}^{m} z_i^2$. Д-ть, что $h(z)$ строго вып. (без критерия желательно)

Утв ⌉ $h(z)$ непр. на вып. компакте Z в евклид. пр-ве, кроме того, $h(z)$ – строго вып. Тогда $\min\limits_{Z} h(z)$ достиг-ся в ! точке

Упр Д-ть это утв. (необх. взять 2 minимальн. т., тогда их полуΣ минимизирующая ⇒ (!?) с опред. стр. вып. ф-ции, полуΣ получается меньше.)

$\nabla_{1.3.}$ ← дост. усл-е

⌉ $F(x,y)$ опред. и непр. на $X \times Y$, где X, Y – вып. компакты евкл. пр-в, причем $X \subset E^m$, $Y \in E^n$. При $\forall x \in X$ F вып. по y $(\smile_y)$, $\forall y \in Y$ F $\frown_x$. Тогда $F(x,y)$ имеет седл. т. на $X \times Y$

▲ 1) ⌉ $F(x,y)$ удовл. всем усл-м + строго вып. по $y \Rightarrow W(x)=\min\limits_{y} F(x,y)=F(x,y(x))$ (по утв). По пред. $\nabla \Rightarrow W(x), y(x)$ – непр.

Возьмем x^* – максимин. стратегия ⇒ ⇒ $W(x^*)=\max\limits_{x} W(x)$. Д-м, что $(x^*, y(x^*))$ – с.т. ф-ции F

$\forall x \in X$, $\forall t \in (0,1)$ $[tx+(1-t)x^*] \in X$

⌉ $\tilde{y}=y(tx+(1-t)x^*)$

$W(x^*) \geqslant W(tx+(1-t)x^*) \circledequal$ // т.к. x^* – максимин. стратегия //

$\circledequal F(tx+(1-t)x^*, \tilde{y}) \geqslant tF(x,\tilde{y})+\underset{\geq 0}{(1-t)}F(x^*,\tilde{y}$

строго вып.

пакте Z

(Z) – строго

в ! точке

а $X\times Y$,

р-в, при-

$\mathcal{F}$ вып.

$\mathcal{F}(x,y)$

строго вып.

$y(x)$ (по

пр.

ратегия $\Rightarrow$

$y(x^*))$ – с.т.

$\in X$

максимин //
стратегия

$(1-t)\mathcal{F}(x^*,\tilde{y})>$

$\geqslant t\mathcal{F}(x,\tilde{y}) + (1-t)W(x^*) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cancel{t}\mathcal{F}(x,\tilde{y}) \leqslant \cancel{t}W(x^*),\ \forall x\in X,\ \forall t\in(0,1)$

Перейдем к $\lim\limits_{t\to 0+}$: // $\tilde{y} \xrightarrow[t\to 0]{} y(x^*)$ //

$$\underbrace{\mathcal{F}(x, y(x^*))}\leqslant W(x^*) =$$

$$= \underbrace{\mathcal{F}(x^*, y(x^*))}_{\text{минимиз. эл-т}} \leq \mathcal{F}(x^*,y),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ опр-ние $(\tilde{1})$ седл. т. $(x^*, y(x^*))$

2) $\exists$ общий случай: ф-ция вогнута по x, вып. по y, без предполож-я, что она строго вып. по y.

$\measuredangle$ возмущ. ф-цию $\mathcal{F}_\varepsilon(x,y) = \underbrace{\mathcal{F}(x,y)}_{\text{вып. по } y} +$

$+\underbrace{\varepsilon\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2}_{\text{стр. вып. по } y \text{ (из упр.)}},\ \varepsilon>0 \Longrightarrow \mathcal{F}_\varepsilon(x,y)$ стр. вып. (как Σ вып. и стр. вып.)
вогнута по x

$\Longrightarrow$ по 1), $\mathcal{F}_\varepsilon$ имеет седл. т. $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow \mathcal{F}_\varepsilon(x, y^\varepsilon) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq \mathcal{F}_\varepsilon(x^\varepsilon, y),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y$ (1)

$\measuredangle\ \overset{\text{посл-ть}}{\varepsilon_k} \longrightarrow 0+ \Longrightarrow$ возникнет посл-ть седл. т-к $(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k})$ ф-ции $\mathcal{F}_{\varepsilon_k}$. Т.к. $(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \in X\times Y$, то из посл-ти можно выделить сх-ся п/посл-ть: $(x^{\varepsilon_{k_l}}, y^{\varepsilon_{k_l}}) \longrightarrow (x^0, y^0)$

Тогда: $\mathcal{F}_{\varepsilon_{k_l}}(x, y^{\varepsilon_{k_l}}) \leqslant \mathcal{F}_{\varepsilon_{k_l}}(x^{\varepsilon_{k_l}}, y^{\varepsilon_{k_l}}) \leq \mathcal{F}_{\varepsilon_{k_l}}(x^{\varepsilon_{k_l}}, y)$ и перейдем к $\lim\limits_{l\to\infty}$

Мы должны помнить, что

$$F_{\varepsilon_{kl}}(x,y) = F(x,y) + \underbrace{\underbrace{\varepsilon_{kl}}_{\text{беск. малое}} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}_{\text{огр.}}}_{\text{в } \lim\limits_{l\to\infty} \text{ это слагаемое исчезнет}}$$

Тогда получим в пределе:

$$F(x,y^0) \leq F(x^0,y^0) \leq F(x^0,y),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y \quad (1)$$

▮

//Док-во аналогичное 1) пред.//

Утв.1] $F(x,y)$ непр. на $X\times Y$, где X – вып. компакт, $X\subset E^m$, Y – компакт метрич. пр-ва. При этом д/ $\forall y$ $F(x,y) \frown_x$, $\forall x$ $Y(x) = \{y(x)\}$ //min дости-ся в ! т.//

Тогда $F(x,y)$ имеет седл. т. $(x^*, y(x^*))$, где x^* – max min стр. //седл. т. ищется как: нах-ся максимин. стратегия $\longleftrightarrow (x^*, y(x^*))$ //

Утв.2] $F(x,y)$ непр. на $X\times Y$, где X – компакт в метрич. пр-ве, Y – вып. компакт в евкл. пр-ве, $Y\subset E^n$. При $\forall x$ $F \smile_y$, $\forall y$ $X(y) = \{x(y)\}$. Тогда $F(x,y)$ имеет седл. т. $(x(y^*), y^*)$, где y^* – min max стр. //она нах-ся как: ищем минимакс. стратегию y^* $\Rightarrow (x(y^*), y^*)$ – седл. т. ф-ции F//

н|

Пример $F(x,y) = xy$, $X=[0,1]$, $Y=[0,1]$

Седл. т. — $(0,0) = (x^0, y^0)$

$x^0 = 0 -$

$Y(0) = [$

Но if

– не с.т

получаем

Пример

] $F(x,$

$Y=[0,1]$

Найти

Провер

$F''_{xx} = -2$

$F''_{yy} = 6y$

Т.к. ф-

$x(y)$ – ф-

$=\max\limits_{X} F(x$

Метод:

$\Rightarrow x(y)=$

Осталь

$M(y) = F$

что

аемое исчезнет

$\forall x \in X, \forall y \in Y$ (1)

, где X — вып.

метрич. пр-ва

//min достиг-ся в ! т.//
$(x^*, y(x^*))$, где x^* — max-min стр-
//седл. т. ищется
x^*))//

., где X — ком-

п. компакт

x F $\forall y$,

y) имеет

акс. стратегию y^*

, $Y = [0,1]$

$x^0 = 0$ — максимин. стратегия (т.к. 1ая компонента)

$Y(0) = [0,1]$ — наилучш. ответ 2го игрока

Но if $y^* = 1 \in Y(0)$, то $(x^0, y^*) = (0,1)$ — не с.т., т.к., отклоняясь от 0, мы получаем больше. $F(x,y) = \underset{0}{x} \cdot \underset{1}{y}$

Пример (исп-ния утв-й)

] $F(x,y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$, $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$

Найти с.т.?

Проверим, что усл-я ∇1.3. выполнены:

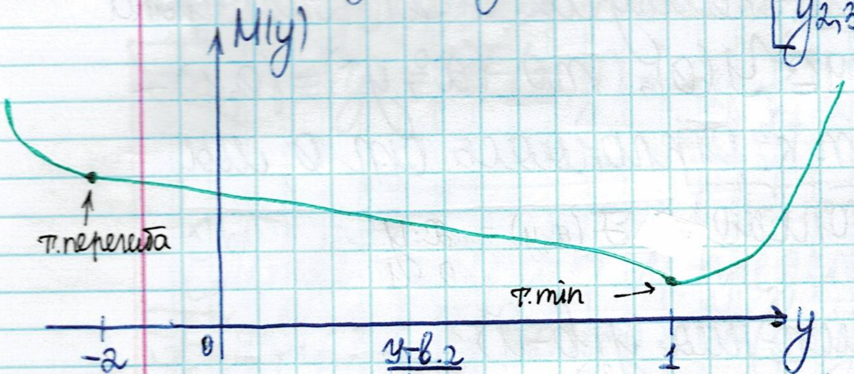
$$\left.\begin{array}{l} F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow \text{ф-ция стр. вогнута по } x \\ F''_{yy} = 6y + 2x \underset{x,y}{\geqslant} 0 \Rightarrow \text{вып. по } y \end{array}\right\} \text{с.т.} \exists$$

Т.к. ф-ция стр. вог. по x, то найдем $x(y)$ — ф-цию наилучш. ответа (она !), т.е. $M(y) = \max_X F(x,y) = F(x(y), y) \Rightarrow$ используем 1ый метод: $F_x = 0 \Leftrightarrow -2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2} \in [0,1] \Rightarrow$
$\Rightarrow x(y) = \frac{y^2}{2}$

Осталось найти минимакс. стратегию:

$M(y) = F(x(y), y) = -\frac{y^4}{4} + y^3 + \frac{y^4}{2} - 4y + 3$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_{2,3} = -2 \end{array}\right.$



$y^* = 1$ – минимакс стратегия

$(x(y^*), y^*) \overset{\text{Утв.2}}{=} \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ – седл.т.

Мы решили зад., воспользовавшись тем, что ф-ция строго вогн. по x

С Утв.1 задача оказ-ся сложнее (трудный maxmin)

Упр $F(x,y)$ стр. вогн. по x, стр. вып. по y. Д-ть, что с.т. !

§3. Смешанное расширение антаг. игр

14/09 // Recap

Матрич. игра, не имеющая реш-я: ← т.к. нет седл.т. (цикл, нет уст. положения в игре)

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \\ О \\ \\ Р \end{array}\left(\begin{array}{ccc} О & & Р \\ -1 & \leftarrow & 1 \\ \downarrow & & \uparrow \\ \textcircled{1} & \rightarrow & -1 \end{array}\right)$$

// Орлянка //

//

] X – мн-во стратегий 1го игрока.

-2

$= 1$ — минимакс стратегия

авшись

$) x$

жнее

т. !

антаг. игр

-я:

— седл.т.

т уст. положения

;)

ока.

Опр Смешанной стратегией 1го игрока φ на X наз-ся вероятностое распределение на X.

Применить $\overset{\text{смеш.стр-гию}}{\varphi}$ — значит выбрать $x \in X$ как реализацию случайной величины с распределением φ

Примеры

1) $\underset{\text{конеч.мн-во}}{X} = \{1, \ldots, m\}$, $\underset{\text{вероятностный в-р}}{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in P = \{p \in E^m :$ $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}\}$ ← вероят. распределение

Применить смеш. стр-гию $\Longrightarrow$ выбрать чистую стр-гию i с вер-тью p_i

В „орлянке" $\Longrightarrow p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

∘ 2 стратегии, $p = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) \longrightarrow$ подбрасывание играл-й кости

∘ $p = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Как ее реализовать с помощью двух играл-х костей? Упр

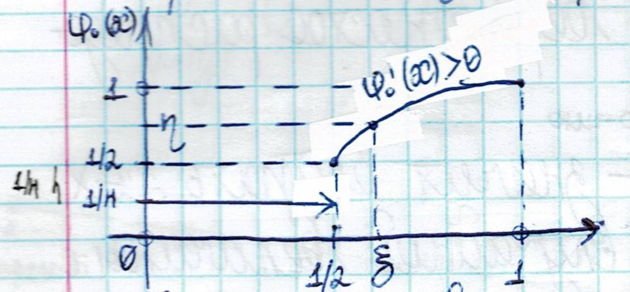
2) $X = [a, b]$ //непр. игры на прямоуг-ке//

$\varphi(x)$ — ф-ция распределения $= P(\xi \leq x)$ на $[a, b]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq b, \\ \text{неуб., непр.справа}, & a \leq x < b \end{cases}$$

Пример (ф-ции распределения)

//неуб., монот., непр. справа//



Как реализовать такую смеш. страт-ю?

//ф-ция Random//

[0,1] — обл-ть знач-й φ₀(x), на этом отр-ке надо реализовать знач-е сл. в. η, ʌ равномерно распределена на [0,1]. Далее необх. посчитать обратную ф-цию (ξ — знач-е обрат. ф-ции к φ₀(x))

$$\xi = \begin{cases} 0, & 0 \le \eta \le 1/4, \\ 1/2, & \frac{1}{4} < \eta \le \frac{1}{2}, \\ \varphi_0^{-1}(\eta), & \frac{1}{2} < \eta \le 1. \end{cases}$$

ξ — сл. величина, имеющая распределение $\varphi_0(x)$: $P(\xi \le x) \overset{\text{график}}{=} P(\eta \le \varphi_0(x)) = \{\eta$ имеет равномер. распределение на $[0,1]\} = \varphi_0(x)$

//просто равна длине отр-ка от 0 до φ₀(x)//

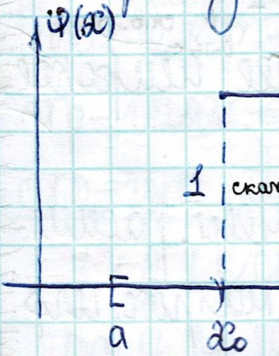
Ф-ла ∫-ла Стилтьеса по ф-ции рас-ния φ₀(x). ∃ ф-ция h(x) — непр. (кус.-непр.) ⇒

$\Rightarrow \Big[\int_0^1 h(x)$

$+ \underbrace{\int_{1/2}^1 h(x)\varphi_0'}_{\text{∫-л Рим}}$

//тут есть плотност ф-ции распред

Выожден



3) X — вып

φ — вер-на

∀ x° ∈ X

т. x° — I_{x°

мера сосредо в т

бор. мн-во

$I_{x^\circ}(B) =$

На осно

Орг-ть в

∃ $x^{(1)}, \ldots,$

ения)

монот.,

справа"//

и. страт-ю?

этом отр-ке

η, λ равно-

Далее необх.

$\}$ — знач-е

пределение

$= \{\eta$ имеет

$]\} = \varphi_0(x)$

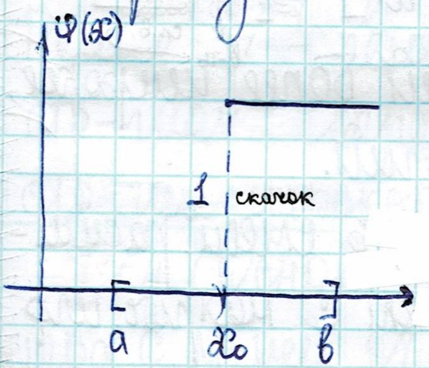
ции рас-ния

ус.-непр.) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\int_0^1 h(x)\,d\varphi_0(x) = \frac{1}{4}h(0) + \frac{1}{4}h\left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{+\int_{1/2}^1 h(x)\varphi_0'(x)\,dx}_{\int\text{-л Римана}}\right]$$

//тут есть плотность — производная ф-ции распределения//

Выроженные ф-ции р-ния: такие ф-ции эквивалентны выбору x_0 (x_0 реализ-ся с вер-тью 1)



$X \subset \{\varphi\}$ ← мн-во всех ф-ций р. на $[a, b]$

//чистые — в противовес смешанным//

//мн-во чистых стратегий расширяем до мн-ва смеш-х//

3) X — вып. компакт в конечномерн. евклид пр-ве.

φ — вер-ная мера на X

$\measuredangle\ x^0 \in X$. Определим ф-цию — индикатор т. x^0 — $I_{x^0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^0, \\ 0, & x \neq x^0 \end{cases}$

↪ мера, сосредоточенная в т. x_0

бор. мн-во

$I_{x^0}(B) = \begin{cases} 1, & x^0 \in B, \\ 0, & x^0 \notin B \end{cases}$

//Прим-ние такого выпожд. распр-ния ~ выбору x_0//

//x^0 выбираем с вер-тью фактич-ки 1//

На основе вырожд. распр-ний можно орг-ть вып. комбинацию вырожд. р-ний

$\exists\ x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in X$. $\measuredangle\ \varphi = \sum_{i=1}^m p_i I_{x^{(i)}}$, где

↙мера ↙ выпукл. комбинация

в-р $p \in P$ — в-ный в-р разм-ти m. If применяем такую смеш. стратегию, то фактически выбираем $x^{(i)}$ с вер-тью p_i

Ф-ла усреднения. $\exists\, h(x) \in X$ — непр. ($\int$-мая) $\Rightarrow$ $\int_X h(x)\, d\left[\sum_{i=1}^{m} p_i I_{x^{(i)}}\right] = \sum_{i=1}^{m} \underset{\text{в-ть}}{p_i} \underbrace{h(x^{(i)})}_{\text{сл.в.}}$

//по смыслу — мат. ожидание

Мн-во смеш. стр-гий более широкое, чем мн-во чистых стр-гий.

Теперь сможем опр-ть смеш. расширение антаг. игр. Начнем с матрич. игр

Смеш. расширение матр. игры

[Г: $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m \times n}$] //выбор незав. друг от друга//

m — 1, строка; n — 2, столбец

a_{ij} — выигрыш 1го игрока, проигрыш 2го; 1ый стремится max-ть выигрыш, 2 — минимиз-ть проигрыш

independent

Смеш. стр-гия 1го игрока — вер. в-р $p \in P$ //выбирает номер строки с вер-тью p_i//

Смеш. стр-гия 2го игрока — вер. в-р $q = (q_1, \dots q_n) \in Q = \{q : \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geqslant 0,\ j = \overline{1,n}\}$

Выигрыш 1го — мат. ожидание выигрыша — $\mathcal{A}(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ (т.к. пара (i, j) возникает с вер-тью $p_i q_j$)

p_i — i-ая строка; q_j — jй столбец

ти т. If
атегию, то
вер-тью p_i
X — непр.
$\sum\limits_{=1}^{m} p_i \underbrace{h(x^{(i)})}_{\text{сл.в.}}$
в-ть
ее широкое,

смеш. расши-
матрич. игр
игры

т друга//
ься так-ть выигрыш,
— вер. в-р

— вер. в-р
$q_j \geq 0, j=\overline{1,n}\}$
ание выигры-
(т.к. пара

jй столбец

Значит смеш. расш-ние матр. игры есть игра $\left[\overline{\Gamma} = \langle \underset{\substack{\text{мн-во}\\\text{смеш.}\\\text{стр. 1го}}}{\uparrow P}, \underset{\text{2го}}{\uparrow Q}, \underset{\substack{\text{мн-во фактически}\\\text{ф-ция ожидания}\\\text{выигрыша 1го}}}{\uparrow \mathcal{A}(p,q)} \rangle\right]$

$(p^0, q^0, \overset{\substack{\text{знач-е игры/}\\\text{знач-е в седл.т.}}}{\downarrow}\vartheta = \mathcal{A}(p^0, q^0))$ — решение игры $\overline{\Gamma}$, т.е. пара $\underset{\text{смеш. стр-гий}}{(p^0, q^0)}$ — седл.т. $\mathcal{A}(p,q)$ на $P \times Q$. Реш-е $\overline{\Gamma}$ — реш-е исх. игры Γ в смеш. стр-гиях. Страт. (p^0, q^0) — оптим. смеш. стр-гии игроков.

+2 часть дальше

5

Т.1.н. (Основная Т матр. игр) Всякая игра с м-цей $\mathcal{A}$ имеет реш-е в смеш. стр-гиях. $(p^0, q^0, \vartheta = \ldots)$, где (p^0, q^0) — с.т. т.е. ←

▲ Необх. д-ть, что $\mathcal{A}(p,q)$ имеет седл.т. на $P \times Q$. $\mathcal{A}(p,q)$ — билин-ая (if фикс. q, то лин-на по p, и наоборот) $\Longrightarrow$ вогнута по p, выпукл. по q. Ф-ция определена на произв-нии вып. компактов $\Longrightarrow \{Т.1.3.\} \Longrightarrow \mathcal{A}(p,q)$ имеет седл.т. на $P \times Q$ ■

6

Когда можно исп-ть смеш. стр-гии? (на примере матричных игр)

(p^0, q^0) — седл. т. $\mathcal{A}(p,q) \overset{\text{опр.}}{\Longrightarrow} \mathcal{A}(p, q^0) \leq \mathcal{A}(p^0, q^0) \leq \mathcal{A}(p^0, q)$, $\forall p \in P$, $\forall q \in Q$.

//в смеш. стр. не выгодно отклоняться от н.д. стр.//

Когда 1му игроку имеет смысл исп-ть оптим. смеш. стр. p^0?

1) Матр. игра повтор-ся много раз. Какую бы смеш. стр. не применял 2й игрок,

$\mathcal{A}(p^0, q) \geq v$

↳ средний выигрыш 1го

2) При однократном повторении игры.

(Теория ожидаемой полезности: денеж. выигрыши a_{ij} нужно преобр-ть в полезности выигрышей, и потом решать матрич. игру)

Как восстанавливается полезность в выигрыше?

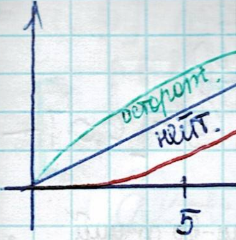
Пример $\mathcal{A} = \overset{\text{выигрыши 1го}}{\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$

М-ца полезностей выигрыша:

$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ Чему равна пол-ть 5?

∡ лотерею: $\begin{array}{cc} \text{выигрыш} & \text{вер-ть} \\ 10 & a \\ 0 & 1-a \end{array}$ $\Rightarrow$ средний выигрыш $= 10a$. При каком a 1й согласен купить билет (за 5 единиц) (сыграть в лотерею)? $a = \frac{1}{2}$ – нейтр. отнош-е, $a > \frac{1}{2}$ – осторожный игрок, $a < \frac{1}{2}$ – азартный игрок.

$\Rightarrow$ можно восстановить пол-ть 5.



ваться от

3) Их м

смесей.

∡ игру

с участк

Его страт

–посади

против п

–норм, д

природы.

Он може

по цене с

выращ-й

оптим. стр

смеш. стр

в виде фу

ысл исп-ть

ного раз.

ял 2й игрок,

ши игры.
аij нужно преобр-ть
ч.игру)

зность в

:

ь 5?

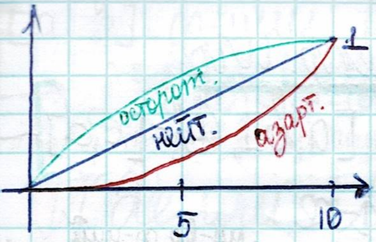
ний выигрыш-

купить билет
(за 5 единиц)

тр. отнош-е,

зартной игрок.

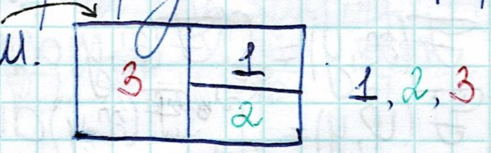
5.



После установления полез-ти выигрыша можно применять смеш. стр-гии в игре (здесь будет учитываться отнош-е к риску) //сверхосторожность: a→1//

3) Их можно реализовать в виде физич. смесей.

∠ игру против природы. ∃ есть фермер с участком земли.



Его стратегия — посадить 1 из 3х культур. Он играет против природы, от нее зависит год — норм, дождливый, засуха ⟹ 3 стратегии природы. $H=\big(\overset{\to\text{урожай}}{h}_{\underset{\text{культура}}{i}\underset{\text{год}}{j}}\big)_{3\times3}$ — ф-ция урожайности. Он может реализовать урожай в конце года по цене a_i ⟹ $\mathcal{A}=(a_i\cdot h_{ij})$ — выручка за выращ-й урожай. Он пытается исп-ть оптим. стратегею: $p^\circ=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ ⟹ он реализ. смеш. стр. в виде физ. смеси ⟹ получит ϑ в виде физ. смеси (выигрыш как реал. величина)

Смеш. расширение непр. игр

$\left[\Gamma = < X, Y, \underset{\hookrightarrow\text{непр. на прямоуг-ке}}{F(x,y)} >,\ X=[a,b],\ Y=[c,d]\right]$ —

— непр. игра на прямоуг-ке

1й игрок: смеш. стр. — $\varphi \in \{\varphi\}$ — мн-во ф-ций~ расп-ния на $[a,b]$

2й игрок: смеш. стр. — $\psi \in \{\psi\}$ — —//— $[c,d]$

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b\int_c^d F(x,y)\,d\varphi(x)\,d\psi(y) \circledequal$$

↳ ∫ по мере, он ∃, т.к. F непр.

Здесь справедлива Т Фубини.

$\exists\ F(x,\psi) = \int_c^d F(x,y)\,d\psi(y)$,

$F(\varphi,y) = \int_a^b F(x,y)\,d\varphi(x)$.

$$\circledequal \int_a^b F(x,\psi)\,d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi,y)\,d\psi(y) \Rightarrow$$ определили смеш. расш игры Γ

//есть более смеш. расшир-я д/более общих игр//

$\Rightarrow \left[\overline{\Gamma} = <\{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi)>\right]$

↳ осредненная ф-ция выигрыша

Нас интересует реш-е игры $\overline{\Gamma}$ в смеш. стр-гиях $\Rightarrow (\varphi^\circ, \psi^\circ, v = F(\varphi^\circ,\psi^\circ))$, где $(\varphi^\circ,\psi^\circ)$ — седл.т. $F(\varphi,\psi)$ на $\{\varphi\}\times\{\psi\}$ $\boxed{5}$

Цель: показать, что ∀ непр. игра на прямоуг-ке имеет реш-е в смеш. стр-гиях. Т.е. нужно д-ть, что игра $\overline{\Gamma}$ имеет реш-е.

∡ посл-ть ф-ций~ рас-ния ф.р. на $[a,b]$ $\varphi^k \in \{\varphi\}$.

Опр Посл-ть сх-ся слабо к φ°, if ∀ непр. на

$[a, b]$ ф-ци

$\rightarrow \int_a^b h(x)$

//Камд. ф-ция ра

Т (Хелли

слабым ко

▲ //Без док

Лемма 3

∃ maxmin-

▲ ∡ смеш. р

$\overline{v} = \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}}$ su

$\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi^k,$

∃ φ^{ke}

$\Rightarrow F(\varphi^{ke},$

$= F(\varphi^\circ,$

Д/∀ ψ∈

Перейдем

т.к. ∀ψ,

Д/ minm

Лемма

на X×Y, г

игр

], $Y=[c,d]$ —

мн-во ф-ций распр-ния на [a,b]

}

} — " — [c,d]

(y) ⟺

ем.

$d\Psi(y) \Rightarrow$ определили смеш. расш игры Г

на выигрыша Г в смеш.

), где

$\times\{\Psi\}$ 5

ра на прямоуг-

ках. Т.е.

реш-е.

$a,b]\ \varphi^k\in\{\varphi\}$.

непр. на

$[a,b]$ ф-ции $h(x)$ вып-ся $\int_a^b h(x)\,d\varphi^k(x) \rightarrow$

$\rightarrow \int_a^b h(x)\,d\varphi^0(x)$ Обозн $\varphi^k \xrightarrow{сл} \varphi^0$

//Кажд. ф-ция распр. определяет ф-циал в пр-ве непр. ф-ций на [a,b]//
↳ $\int$-л

∇ (Хелли) Мн-во ф. р. на $[a,b]$ $\{\varphi\}$ явл-ся слабым компактом. (смеш. стр-й 1го игрока) //Из $\forall$ посл-ти $\{\varphi^k\}$ можно выделить слабо сх-ся п/посл-ть $(\exists\ \varphi^{kl})$: $\varphi^{kl} \xrightarrow{сл} \varphi^0$//

▲ //Без док-ва// ■ Гниденко „Курс ТВ"

Лемма 3. ∃ Г — непр. игра на □, в ней ∃ maxmin-я и minmax-я смеш. стр.

▲ ∀ смеш. расш. $\overline{\Gamma}$, где $\underline{v} = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi,\psi)$, $\overline{v} = \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \mathcal{F}(\varphi,\psi)$. Д-м, что ∃ : $\exists\ \varphi^k\in\{\varphi\}$: $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi^k,\psi) \longrightarrow \underline{v}$ //опр-ние верх. грани//. По ∇ Хелли, $\exists\ \varphi^{kl} \xrightarrow{сл} \varphi^0$. ∀ смеш. стр. 2го $\psi\in\{\psi\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\varphi^{kl},\psi) = \int_a^b \underbrace{\mathcal{F}(x,\psi)}_{\psi - \text{фикс.; непр. ф-ция по } x \text{ (из-за усреднения)}} d\varphi^{kl}(x) \xrightarrow[сх\text{-}ть]{слаб.} \int_a^b \mathcal{F}(x,\psi)\,d\varphi^0(x) = \mathcal{F}(\varphi^0,\psi)$

Д/ $\forall\ \psi\in\{\psi\} \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi^{kl},\psi) \geqslant \inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi^{kl},\psi)$.

Перейдем к $\lim\limits_{l\to\infty} \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi^0,\psi) \geqslant \underline{v}$, $\forall\psi \Rightarrow$

т.к. $\forall\psi$, то $\inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi^0,\psi) \geqslant \underline{v}$.

> невозможно ($\underline{v}$ — верх. грань от нижней)

= $\Rightarrow \varphi^0$ — maxmin смеш. стр. 1го

Д/ minmax-х стр-й аналогично ■

Лемма 4. ∃ $\mathcal{F}(x,y)$, $\mathcal{F}_1(x,y)$ определены на $X\times Y$, где X, Y — ∀. Ф-ции огр., д/ них вып-но усл-е близости $|F(x,y) - F_1(x,y)| \le \varepsilon, \forall x \in X, \forall y \in Y$ (A). Тогда $|\underline{v} - \underline{v}_1| \le \varepsilon$, $|\overline{v} - \overline{v}_1| \le \varepsilon$.

на экз-е можно не д-ть

▲] $h(z), h_1(z) \in Z$ – огр., вып-но усл-е близости: $|h(z) - h_1(z)| \le \varepsilon, \forall z \in Z$. Тогда ниж. и верх. грани будут близки, д-м это.

$$h_1(z) - \varepsilon \leqslant h(z) \leqslant h_1(z) + \varepsilon, \forall z \in Z \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \inf_Z h_1(z) - \varepsilon \leqslant \inf_Z h(z) \leqslant \inf_Z h_1(z) + \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\inf_Z h(z) - \inf_Z h_1(z)| \le \varepsilon.$$ Аналогично с sup.

Тогда $\forall x \in X$ $$|\overset{\parallel\, w(x)}{\inf_y F(x,y)} - \overset{\parallel\, w_1(x)}{\inf_y F_1(x,y)}| \le \varepsilon \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\sup_X \underset{\underline{v}}{\underset{\parallel}{w(x)}} - \sup_X \underset{\underline{v}_1}{\underset{\parallel}{w_1(x)}}| \le \varepsilon.$$

2е утв-е док-ся аналогично ■

T_{10} (Основная T непр. игр) Всякая непр. игра Γ на □ имеет реш-е в смеш. стр-ях (написать тройку)

▲ $F(\varphi, \psi)$ имеет с.т. на $\{\varphi\} \times \{\psi\} \Longrightarrow$ имеет реш-е игра $\overline{\Gamma}$. Это надо д-ть.

$$\underline{v} = \max_{\{\varphi\}} \inf_{\{\psi\}} F(\varphi, \psi), \quad \overline{v} = \min_{\{\psi\}} \sup_{\{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

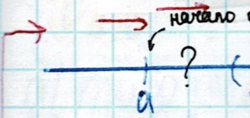
достиг-ся из леммы 3

Т.е. необх. д-ть $\underline{v} = \overline{v} \Longrightarrow \{T\,\underset{(a)}{1.1}\} \Longrightarrow$ с.т.

Непр. игру на □ можно аппрокс-ть матр. игрой

!(констр. способ док-ва)

] $X = [a, b$



$\exists\, x^i \in X$

$[c, d]$:

$\exists\, y^j \in Y^j$

Возьмем

что ступе

$\Longrightarrow \forall \varepsilon \times 0$

$\Longrightarrow$ мы фак

$\Longrightarrow \exists$ мат

Сопостав

$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ – ве

Определ

// Вер-ть (пола

Аналогично

$\le \varepsilon, \forall x \in X,$

$\bar{v} - \bar{v}_1| \le \varepsilon.$

но усл-е вы-

Тогда

-м это.

$C \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

но с sup.

$_1(x)$

$x,y)| \le \varepsilon \Longrightarrow$

ая непр. игра

о- шах (написать тройку)

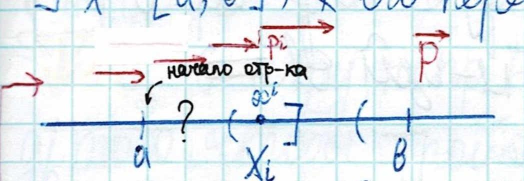
$\Longrightarrow$ имеет

$F(\varphi, \psi)$

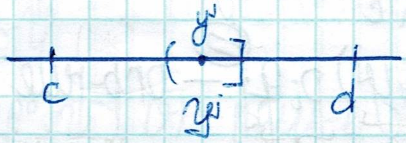
$\Longrightarrow$ С.Т.

-ть матр. игрой

] $X = [a, b]$, ∡ его пересечение на попарно непересек-ся мн-ва: $X = \bigcup_{i=1}^{m} X^i$

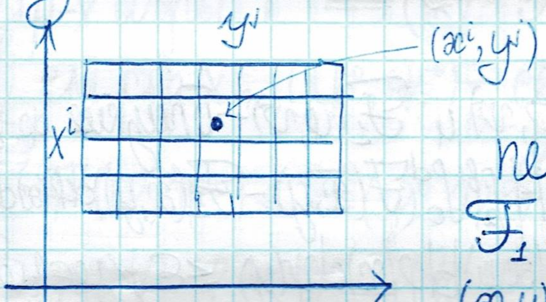


∡ $x^i \in X^i$. Аналогичное разбиение д/ $[c,d]$:



$Y = [c,d] = \bigcup_{j=1}^{n} Y^j$

∡ $y^j \in Y^j$.



Определим ступенчатую ф-цию $F_1(x,y) = F(x^i, y^j)$, $(x,y) \in X^i \times Y^j$.

Возьмем $\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow$ найдутся такие разбиения (дост. big n и m), что ступенч. ф-ция будет равномер. аппр-ть непр. $F \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; |F(x,y) - F_1(x,y)| \le \varepsilon, \forall x \in X, \forall y \in Y$ (1) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ мы фактич. аппр-ли непр. игру матричной $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ ∡ матр. игру: $A = (a_{ij} = F(x^i, y^j))_{m \times n}$

Сопоставим $\varphi \to p = \{p_1, \dots, p_m\}$, где $p_i = \int_{X^i} d\varphi(x) \geq 0$, — вер-ть попадания в X^i

φ — смеш. стр. 1го в непр. игре

p — в матр. игре

$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ — вер-ть попадания во весь отр-к

Определим $\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на}} P \Longrightarrow \forall p \in P \;\exists \varphi: \varphi \to p$

// Вер-ть попадания в $x^i = p_i \Longrightarrow$ ф. р. ступенчатая (m ступеней) //

Аналогично д/ смеш. стр. 2го игрока: $\psi \to q = (q_1, \dots, q_n)$, где $q_j = \int_{Y^j} d\psi(y) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \Rightarrow q$ — вер. в-р / смеш. стр. в игре с м-цей $\mathcal{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\psi\} \xrightarrow{на} Q$

$$\mathcal{F}_1(\overset{\uparrow}{\varphi}, \overset{\uparrow}{\psi}) = \int_a^b\int_c^d \mathcal{F}_1(x,y)\,d\varphi(x)\,d\psi(y) = $$

ступ. ф-ция, усредненная по смеш. стр.

$$\textcircled{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathcal{F}(x^i, y^j)}_{\text{ступенька}} \underbrace{p_i q_j}_{\text{вер-ть попадания в } X^i \times Y^j}$$ — опр-ние $\int$ла от ступенч. ф-ции

$\textcircled{=} \mathcal{A}(p,q)$ (2)

Покажем, что $\mathcal{F}(\varphi,\psi)$ и $\mathcal{F}_1(\varphi,\psi)$ — близкие ф-ции.

$$|\mathcal{F}(\varphi,\psi) - \mathcal{F}_1(\varphi,\psi)| = \left|\int_a^b\int_c^d (\mathcal{F}(x,y) - \mathcal{F}_1(x,y))\,d\varphi(x)\,d\psi(y)\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b\int_c^d \underbrace{|\mathcal{F}(x,y) - \mathcal{F}_1(x,y)|}_{\overset{(1)}{\leq}\varepsilon}\,d\varphi(x)\,d\psi(y) \leq \varepsilon, \forall \varphi \in \{\varphi\}, \forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ усл-е ($\mathcal{A}$) вып-но.

Из $\underline{Л.4} \Rightarrow |\underbrace{\max_{\{\varphi\}} \inf_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi,\psi)}_{\underline{v}} - \max_{\{\varphi\}} \min_{\{\psi\}} \mathcal{F}_1(\varphi,\psi)| \leq \varepsilon$,

$\max_{\{\varphi\}} \min_{\{\psi\}} \mathcal{F}_1(\varphi,\psi) \overset{(2)}{=} \max_P \min_Q \mathcal{A}(p,q)$

$|\underbrace{\min_{\{\psi\}} \sup_{\{\varphi\}} \mathcal{F}(\varphi,\psi)}_{\overline{v}} - \min_{\{\psi\}} \max_{\{\varphi\}} \mathcal{F}_1(\varphi,\psi)| \leq \varepsilon$

$\min_{\{\psi\}} \max_{\{\varphi\}} \mathcal{F}_1(\varphi,\psi) \overset{(2)}{=} \min_Q \max_P \mathcal{A}(p,q)$

По осн. Т матр. игр, $\mathcal{A}(p,q)$ имеет с.т. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ матр. игра имеет реш-е в смеш. стр-х $\Rightarrow$

minmax = maxmin $\Rightarrow |\underline{v} - \overline{v}| \leq 2\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v} = \overline{v}$ в силу произв-ти ε ■ // $\Rightarrow F(\varphi,\psi)$ имеет с.т. //

---

§4. Св-ва

Т 1.6. *

д/того ч

в смеш. с

$\forall x \in X$, $\forall y \in$

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ $\exists$ (

стр-х игры

в см. стр-х

$\Rightarrow F(\varphi, \psi$

В реш φ

(их исп-ние — ч

$\forall x \in X$, $\forall y \in$

$\boxed{\Leftarrow}$ (*) в

* $\mathcal{F}(x, \psi^0)$

и прав. ча

$\exists\, \varphi = \varphi^0$, ψ

$\Rightarrow v = \mathcal{F}($

Т 1.7. $\exists$

чтобы тр

вер. в-р/
$\Longrightarrow$

$(y) =$

$\int$ла от огранич. ф-ции

близкие ф-ции.
$F_1(x,y)|d\varphi(x)d\psi(y)|$
$\leq \varepsilon, \forall \varphi \in \{\varphi\},$
$\forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow$

$\min F_1(\varphi,\psi)| \leq \varepsilon,$
$\psi\}$ //(2)
in $A(p,q)$
$\max F_1(\varphi,\psi)| \leq \varepsilon$
$\varphi\}$ || (2)
ax $A(p,q)$
от с.т. $\Longrightarrow$
стр-х $\Longrightarrow$
$, \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow$
имеет с.т. //

---

§4. Св-ва реш-й в смеш. стр-х

//д/ матр. и непр. игр//
//св-ва → реш-я игр//
//∇ д/непр. на □, а д/ матрич. док-во самостоятельно! //

∇1.6. ∡ игру, непр. на □, Г. Тогда, д/ того чтобы тройка $(\varphi^\circ, \psi^\circ, \vartheta)$ была реш-м в смеш. стр-х игры Г $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{F(x,\psi^\circ) \leq \vartheta}_{\text{аналогично}} \underbrace{\leq F(\varphi^\circ, y)}_{\varphi^\circ \text{ гарантирует выигрыш 1-му не меньше, чем } \vartheta \text{ при } \forall \text{ чист. стр. 2-го игрока}}$, $\forall x \in X, \forall y \in Y$ (✱)

см. стр

▲ $\boxed{\Longrightarrow}$ ⊐ $(\varphi^\circ, \psi^\circ, \vartheta)$ – реш-е в смеш. стр-х игры Г $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (✱). По опр-нию реш-я в см. стр-х, $(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ – седл. т. ф-ции $F(\varphi, \psi)$, ϑ – знач-е в седл. т. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow F(\varphi, \psi^\circ) \leq F(\varphi^\circ, \psi^\circ) \leq F(\varphi^\circ, \psi), \forall \varphi \in \{\varphi\}, \forall \psi \in \{\psi\}$.

В роли φ и ψ возьмем чистые стратегии x и y (их исп-ние – частный случай смеш. стр.): $F(x,\psi^\circ) \leq F(\varphi^\circ, \psi^\circ) \leq F(\varphi^\circ, y)$, $\forall x \in X, \forall y \in Y \Longrightarrow$ (✱)

$\boxed{\Longleftarrow}$ (✱) вып-но $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $(\varphi^\circ, \psi^\circ, \vartheta)$ – реш-е в см. стр.

∡ $F(x,\psi^\circ) \leq \vartheta$. Возьмем $\forall \varphi \in \{\varphi\}$, усредним лев. и прав. часть $\Longrightarrow F(\varphi, \psi^\circ) \leq \underbrace{\vartheta \leq F(\varphi^\circ, \psi)}_{\text{аналогично усредняя}}$, $\forall \varphi, \forall \psi$.

⊐ $\varphi = \varphi^\circ, \psi = \psi^\circ \Longrightarrow F(\varphi^\circ, \psi^\circ) \leq \vartheta \leq F(\varphi^\circ, \psi^\circ) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vartheta = F(\varphi^\circ, \psi^\circ)$ ■ //∇ справед. д/ ∀ смеш. расш-й, где справедл. ∇ Фубини//

∇1.7. ⊐ есть игра с м-цей A. Тогда, д/ того чтобы тройка $(p^\circ, q^\circ, \vartheta)$ была реш-м в смеш.

см. стр.

стр-х $\iff \mathcal{A}(i, q^0) \leqslant \vartheta \leqslant \mathcal{A}(p^0, j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ (*)

Упр ▲ //Самостоятельно// ■ //в теории - без док-ва, но может попасться во 2м вопросе!

Обсудим нер-во с т. зрения проверки.

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \\ p_1^0 \\ \\ i \\ \\ p_m^0 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc} q_1^0 & \cdots & q_n^0 \\ & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & j & \end{array}\right)$$

$\mathcal{A}(i, q^0) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0$ — ск.пр. i-й строки на в-р q^0 //смотрим $\leqslant \vartheta$ или нет

↳ средний выигрыш игрока, когда 1ый исп-т чист., 2ой смеш.стр.

$\mathcal{A}(p^0, j) = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij}$ //смотрим $\geqslant \vartheta$ или нет

Пример $\underset{\substack{n\times n \\ \text{цикл.}}}{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ c_n & c_1 \dots & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_2 & \dots\ c_n & c_1 \end{pmatrix}$

1ый

$p^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right),\ q^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ — с равной вер-тью выбирать каждую строчку

(p₀ скалярно на ∀столбец) $\vartheta = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k}{n}$ — сред. знач-е c_k

Говорят, что тут есть выравнивающая стр., т.е. когда нер-во превращ-ся в рав-во.

↳ (p^0, q^0)

Упр ∗ $F(x,y) = (x-y)^2 - |x-y|$, $X = [0,1] = Y$ — не вогн., не вып.

$\varphi(x) = x$

Показать,

1.8.

1) ∀ смеш.

2) ∀ смеш

▲ 1) $\forall \varphi \in$

$\geqslant \int_c^d \min\limits_{y}$

$\Rightarrow$ т.к. $g/$

$\geqslant \underset{\text{чист.}}{h}\ Y \subset h$

2) Анало

Сл Д

$\vartheta = \max\limits_{h\varphi}$

▲ Непр. и

$\Rightarrow F(\varphi, \psi)$

$\Rightarrow \vartheta = \max\limits_{h\varphi}$

$, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ (*)

– без док-ва,

проверки.

ϑ° //смотрим $\leq \vartheta$ или нет

...стр.

...й вер-тью выбирать ...строчку

...равнивающая

...рав-во.

$=y$

$\varphi^\circ(x) = x$  $\psi^\circ(y) = y$

Показать, что $\vartheta = -\frac{1}{6}$, т.е. φ° и ψ° – выравнивающ. стр.

∇ 1.8. В непр. игре Г справедливо:

1) $\forall$ смеш. стр. $\varphi \in \{\varphi\} \Rightarrow \inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\underline{\varphi}, \psi) = \min\limits_{y} F(\varphi, y)$; фикс. $\overline{\varphi}$,

то нижн. грань по смеш. стр. достиг-ся на чист. стр-х

2) $\forall$ смеш. стр. $\psi \in \{\psi\} \Rightarrow \sup\limits_{\{\varphi\}} \mathcal{F}(\varphi, \psi) = \max\limits_{x} \mathcal{F}(x, \psi)$

▲ 1) $\forall \varphi \in \{\varphi\}, \forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{F}(\varphi, \psi)}} = \int_c^d \underbrace{\mathcal{F}(\varphi, y)}_{\text{непр. по } y\text{, усреднен по } \varphi} d\psi(y) \geq$

$\geq \int_c^d \min\limits_{y} \mathcal{F}(\varphi, y)\, d\psi(y) = \underline{\underline{\min\limits_{y} \mathcal{F}(\varphi, y)}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. д/ $\forall \psi \Rightarrow \underline{\inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi, \psi) \geq \min\limits_{y} \mathcal{F}(\varphi, y)} \geq$

$\geq \{ \underset{\text{чист.}}{Y} \subset \underset{\text{смеш.}}{\{\psi\}} \} \geq \underline{\inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi, \psi)} \Rightarrow$ доказано.

2) Аналогично ■

Сл Д/ непр. игры Г на ▭ справедливо:

$\vartheta = \max\limits_{\{\varphi\}} \min\limits_{y} \mathcal{F}(\varphi, y) = \min\limits_{\{\psi\}} \max\limits_{x} \mathcal{F}(x, \psi)$

▲ Непр. игра Г имеет реш-е в смеш. стр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{F}(\varphi, \psi)$ имеет сед. т $\Rightarrow \underline{\vartheta} = \overline{\vartheta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vartheta = \max\limits_{\{\varphi\}} \inf\limits_{\{\psi\}} \mathcal{F}(\varphi, \psi) \overset{T.1.1}{=} \min\limits_{\{\psi\}} \sup\limits_{\{\varphi\}} \mathcal{F}(\varphi, \psi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{\text{Т}1.8\} \Rightarrow \vartheta = \max_{\{\varphi\}} \min_{y} \mathcal{F}(\varphi, y) =$$

$$= \min_{\{\psi\}} \max_{X} \mathcal{F}(x, \psi) \blacksquare$$

Т1.8' В $\forall$ игре с м-цей $\mathcal{A}$ справедливо:

//Подсказка к ▲ в конс-ции к экз//

1) $\forall p \in P \quad \min\limits_{Q} \mathcal{A}(p, q) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \mathcal{A}(p, j)$

2) $\forall q \in Q \quad \max\limits_{P} \mathcal{A}(p, q) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} \mathcal{A}(i, q)$

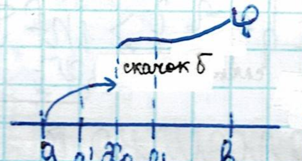
▲ Аналогично ■

Сл' $\mathcal{D}$/ знач-я игры с м-цей $\mathcal{A}$ справедл.:

$$\vartheta = \max_{P} \min_{1 \leq j \leq n} \mathcal{A}(p, j) = \min_{Q} \max_{1 \leq i \leq m} \mathcal{A}(i, q)$$

▲ Аналогично ■

$\exists\ [a, b] = X.$



$x_0 \in Sp(\varphi)$

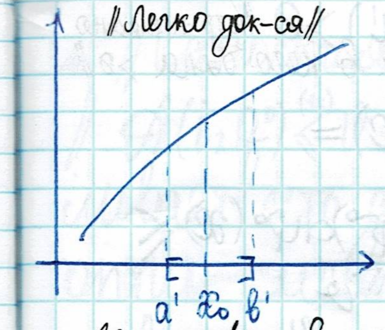
<u>Опр</u> $x' \in$ спектру смеш. стр-гии φ $(x' \in Sp(\varphi))$, if вып-но: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ [a', b'] \subset [a, b]$, $x' \in [a', b']$, $b' - a' < \varepsilon$, $\underbrace{\varphi(b') - \varphi(a')}_{\substack{\parallel \\ P((a', b']) \\ \vee \\ 0}} > 0$ //точки, где ф.р. имеет скачки — т. спектра//

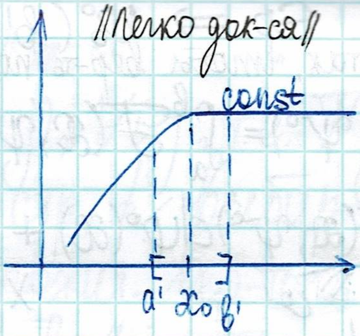
//спектр смеш. стр. — точки роста ф-ции расп-я φ//

$P((a', b'])$ — вер-ть попасть в полуинтервал

$\exists$ в т. x_0 $\varphi'(x_0) > 0$ (и $\exists$) $\Rightarrow x_0$ — т. спектра

//рис. левый на след. стр.//





Тут x_0 — тоже т. спектра

Упр Мн-во т-к спектра на [а, в] замкнуто. Д-ть.
(или дополнение к нему явл-ся откр. п/мн-вом [а, в])

Т 1.9. (Св-во дополняющей нежесткости)

∃ тройка $(\varphi^\circ, \psi^\circ, \vartheta)$ — реш-е в смеш. стр-х непр. игры Г на □. Тогда справедливо:

1) Д/ ∀ т. $x \in Sp(\varphi^\circ) \Rightarrow \mathcal{F}(x, \psi^\circ) = \vartheta$;

2) Д/ ∀ т. $y \in Sp(\psi^\circ) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi^\circ, y) = \vartheta$.

//1) $\mathcal{F}(x, \psi^\circ) \overset{(*)}{\leqslant} \vartheta$, $\forall x \in X$; if $x \in Sp(\varphi^\circ)$, то нер-во превращ-ся в рав-во;

2) $\mathcal{F}(\varphi^\circ, y) \overset{(*)}{\geqslant} \vartheta$, $\forall y \in Y$; — // — //

▲ 1) (От противного) $\exists x' \in Sp(\varphi^\circ)$: $\mathcal{F}(x', \psi^\circ) < \vartheta$. $\mathcal{F}(x, \psi^\circ)$ (по y усреднили) — непр. по x (т.е. в некот. окрест-ти $\mathcal{F}$ все еще $< \vartheta$, ну даже $\leqslant \vartheta' < \vartheta$) $\Longrightarrow \exists [a', в']$, содержащий x' (т.е. $x' \in [a', в']$), $в' - a' < \varepsilon \Longrightarrow$ {опр-е непр-ти} $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{F}(x, \psi^\circ) \leqslant \vartheta' < \vartheta$, $\forall x \in [a', в']$. Из

Опр-я Sp $\Rightarrow \varphi^\circ(b') - \varphi^\circ(a') > 0$ //отр-к можно выбрать так, чтобы вер-ть попадания в него была >0//

$$\vartheta = \mathcal{F}(\varphi^\circ, \psi^\circ) = \int_a^b \mathcal{F}(x, \psi^\circ)\,d\varphi^\circ(x) =$$

$$= \int_{a'}^{b'} \underset{\vartheta'}{\underbrace{\mathcal{F}(x,\psi^\circ)}_{\leqslant}}\,d\varphi^\circ(x) + \int_{X\setminus[a',b']} \underset{\vartheta}{\underbrace{\mathcal{F}(x,\psi^\circ)}_{\leqslant}}\,d\varphi^\circ(x) \leqslant$$

$$\leqslant \vartheta' \underbrace{\int_{a'}^{b'} d\varphi^\circ(x)}_{\substack{\text{вер-ть попасть}\\ \text{в } [a',b']}} {}^{>0} + \vartheta \int_{X\setminus[a',b']} d\varphi^\circ(x) \underset{\vartheta'<\vartheta}{\overset{}{<}} \vartheta \int_{a'}^{b'} d\varphi^\circ(x) +$$

$$+ \vartheta \int_{X\setminus[a',b']} d\varphi^\circ(x) = 1\cdot\vartheta = \vartheta \Longrightarrow \boxed{!?}$$ т.к. $\vartheta < \vartheta$

2) Аналогично ■

Сл $\exists\ (\varphi^\circ, \psi^\circ, \vartheta)$ – реш-е в смеш. стр. непр. игры Γ на $\square$. Тогда справедливо:

1) $\mathcal{F}(x, \psi^\circ) < \vartheta \Rightarrow x \notin Sp(\varphi^\circ)$

2) $\mathcal{F}(\varphi^\circ, y) > \vartheta \Rightarrow y \notin Sp(\psi^\circ)$ //логично//

Т 1.10 (Св-во дополняющей нежёсткости)

$\exists\ (p^\circ, q^\circ, \vartheta)$ – реш. игры с м-цей $\mathcal{A}$. Тогда справедливо:

1) if $p_i^\circ > 0 \Rightarrow \mathcal{A}(i, q^\circ) = \vartheta$;

2) if $q_j^\circ > 0 \Rightarrow \mathcal{A}(p^\circ, j) = \vartheta$

▲ //Самост

// $\mathcal{A}(i, q^\circ) \overset{(*)}{\leqslant}$

ливает; чт

оптим. сл

превращ-с

// $\mathcal{A}(i, q$

$\mathcal{A}$/ этого $\leqslant$

$\forall$ стр. явл (и чист., и смеш)

Сл If (логичное)

игры с м-

1) If $\mathcal{A}$

2) If $\mathcal{A}($

//Покажу

$\mathcal{A}(i, q^\circ) \leqslant \vartheta$

$\vartheta \leqslant \mathcal{A}(p^\circ,$

If $p_i^\circ > 0,$

If $\mathcal{A}(i, q$

0 //стр-к можно
его была >0//

$\varphi^\circ(x) \leqslant$

$d\varphi^\circ(x) +$

т.к. $v<v$

меш. стр.

раведливо:

огично//

нежесткости)

й A. Тогда

▲ //Самостоятельно// ■

// $A(i,q^\circ) \overset{(*)}{\leqslant} v \overset{(*)}{\leqslant} A(p^\circ, j)$, $\forall i, j$, т.е. Т устанавливает, что д/чист. стр., $\angle$ выбир-ся в оптим. смеш. с положит. вер-тью, нер-во превращ-ся в рав-во//

// $A(i,q^\circ) = v \not\Rightarrow p_i^\circ > 0$

Д/этого $\measuredangle$ м-цу $A = \begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \end{pmatrix}$, где $v = a$,

и чист., и смеш.

$\forall$ стр. явл-ся оптим. $\Rightarrow$ легко проверяется//

логичное

Сл If (p°, q°, v) – реш-е в смеш. стр. игры с м-цей A, то справедливо:

1) If $A(i, q^\circ) < v \Rightarrow p_i^\circ = 0$ //оптим. смеш. стр. 1го игрока, 1 строчка выбир-ся с вер-тью 0//

2) If $A(p^\circ, j) > v \Rightarrow q_i^\circ = 0$

8

//Почему св-во доп. нежесткости? Из $(*) \Rightarrow$
$A(i, q^\circ) \leqslant v \Leftrightarrow p_i^\circ \geqslant 0$;
$v \leqslant A(p^\circ, j) \Leftrightarrow q_j^\circ > 0$ //Показ-ся аналогично//
If $p_i^\circ > 0$, то $A(i, q^\circ) = v$ („жёстко вып-ся")
If $A(i, q^\circ) < v$, то, по Сл, $p_i^\circ = 0$ (if „строго" $\Rightarrow$ „=")//

Примеры

1) „Орлянка" – игра решена

$$\overset{\text{цикл. м-ца}}{\curvearrowleft} A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad v=0,\ p^0=q^0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

2) Игра с diag м-цей //$\overset{\text{мб}}{\text{многократная}}$//

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ \cdots & & a_i & & \cdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{pmatrix} \qquad a_i>0,\ i=\overline{1,n}$$

If $0<a_i<1$: игра „полицейский–преступник": пол. должен поймать пр., д/это идет в n мест $(1,\dots,n)$ [у преступника такая же стратегия – уйти в одно из n мест] $\Rightarrow a_i$ – вер-ть, что пол. поймает пр. Как нужно действовать пол., пр.?

Эта игра в чист. стр. реш-й не имеет:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v} &= \max_i \underbrace{\min_j a_{ij}}_{=0} = 0 \\ \overline{v} &= \min_j \underbrace{\max_i a_{ij}}_{a_j} = \min_{1\le j\le n} a_j > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{седл. т. нет}$$

$\Rightarrow$ необх. решать игру в смеш. стр.

] в оптим. смеш. стр. все компоненты >0

$\overset{p_i^0>0}{\Longrightarrow} A(i, q^0$

$\Rightarrow q_i^0=\dfrac{v}{a_i}$,

$\curvearrowleft \sum q_i^0=1$ – вер. в-

$\Rightarrow v=\dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}}$

$q_i^0=\dfrac{1}{a_i}\cdot$

Аналоги

$\Rightarrow a_j p_j^0=v, j$

//Усл-е (*)

смеш. стр.,

Преступни

$\angle$ обратно

Полиц. де

//Здесь ре

$v=\max\ mi$

$\overset{P \quad \text{неважно} \quad j}{\ominus} \max\limits_{\substack{P:\\ \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\\ p_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}}} (\min\limits_{i}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

тная //

на „полицей-

ник": пол.

ть пр., д/это

ступника

одно из

пол. поймает

л., пр.?

й не имеет:

седл. т. нет

стр.

мпаненты > 0

$\xrightarrow{p_i^0>0} \mathcal{A}(i, q^0) = v,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow a_i q_i^0 = v,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow q_i^0 = \frac{v}{a_i}$, где v ищется как: $1 = v\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \Rightarrow$

$\sum q_i^0 = 1$ — вер. в-р

просуммируем рав-во

$\Rightarrow v = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \Rightarrow$ оптим. смеш. стр. 2го игрока:

$$q_i^0 = \frac{1}{a_i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} > 0$$

Аналогично д/ 1го $\xrightarrow{q_j^0>0} \mathcal{A}(p^0, j) = v,\ j=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_j p_j = v,\ j=\overline{1,n} \Rightarrow p_i^0 = \frac{1}{a_i}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}} > 0$

// Усл-е (*) вып-но как рав-во $\Rightarrow$ оптим. смеш. стр., но каков их смысл?

Преступник идет в i-е место с вер-тью q_i^0, $\propto$ обратно пропорц. вер-ти, что его поймают. Полиц. действует также. //

// Здесь решена зад. на max min:

$v = \max\limits_{p} \min\limits_{j} \mathcal{A}(p, j) \circeq$ (См. Т 1.8')

не важно

$\circeq \max\limits_{\substack{p:\\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\\ p_i \geq 0,\ i=\overline{1,n}}} \min\limits_{i} a_i p_i = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$

p^0 — max min стр. дается ф-лой выше

//

3) Пример с м-цей полезн-ти

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Легко выписать оптим. стр.

$\exists\, \underset{\text{(игрок сверх-осторожен)}}{a} \overset{\text{близко}}{\approx} 1 \Longrightarrow$ его заставили играть в

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, а он не хочет... $\Longrightarrow \underset{\text{м-цы } A'}{\underset{\uparrow}{v}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ оптим. стр. выбир-ся (1 или 2 строчку) с вер-тью $\frac{1}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ 1ый игрок нервничает: его заставили играть, он бросает монету, что будет, то и будет...

21/09 **§5. Методы реш-я матрич. игр**

$\exists\, \mathcal{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ – матрица матр. игры

// Проверяем есть ли реш-е игры в чист. стр., т.е. есть ли у м-цы $\mathcal{A}$ седл. т., дост. проверить: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} \overset{?}{=} \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$. If "=" $\Longleftrightarrow$ седл. т. есть, if "<", то седл. т. нет, решаем игру в смеш. стр.

Была доказана T1.7.: $(\overbrace{p^0, q^0}^{\text{оптим. смеш. стр.}}, v)$ ← знач. игры – реш. матр. игры в смеш. стр $\Longleftrightarrow \mathcal{A}(i, q^0) \leqslant v \leqslant \mathcal{A}(p^0, j)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (*)

ь в

$v = \frac{1}{2} \Longrightarrow$

$\frac{1}{2} \Longrightarrow$

аставим

будет, то и

ры

чист. стр.,

ст. проверить:

седл. т. есть,

в смеш. стр.

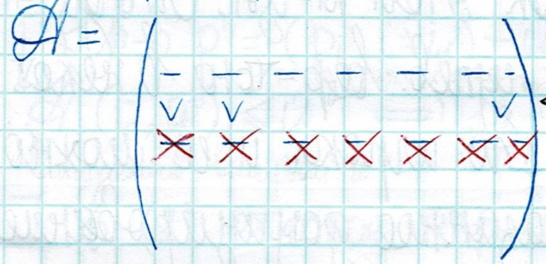
ры

ш. матр.

$(p^{0}, \ldots), \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}$ (*)

цель — найти хотя бы 1 реш-е в смеш. стр. //

I. Доминирование строк и столбцов матр. игр



← „знак больше"

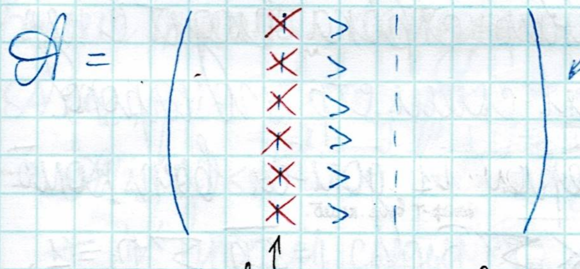
//2я строка хуже д/1го, т.к. выигрыши меньше//

⇓

× вычеркиваем 2ую стр. ⟹

⟹ м-ца меньших размеров

Аналогично со столбцами.



↑

выигрыш 2го игр. меньше ⇒ вычёркиваем

] $a = (a_1, \ldots, a_\ell)$, $b = (b_1, \ldots, b_\ell)$ — в-ры одной dim-ти.

Опр Будем говорить, что в-р **a** доминирует в-р **b**, if $a_i \geqslant b_i$, $i = \overline{1,\ell}$. //if $a_i = b_i$, $\forall i \Rightarrow$ a доминирует b, b доминирует a //

Опр Будем говорить, что в-р **a** строго доминирует в-р **b**, if $a_i > b_i$, $i = \overline{1,\ell}$

If у нас есть набор в-ов $a^{(i)}$, $i = \overline{1,m}$, в некот. евклид. пр-ве и есть в-р $p = (p_1, \ldots, p_m)$ — вероятн. в-р, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geqslant 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда выпук. комбинацией в-ов $a^{(i)}$ с коэфф-тами p_i наз-ся $\sum_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}$

∇ **1.11.** (О доминировании строк)] некот. строка м-цы A доминируется вып. комб-цией остал. строк этой м-цы. Тогда эта строка входит с нулев. вер-тью в некот. оптим. смеш. стр. 1го игрока и ее можно вычеркнуть. If указанное доминирование строгое, то доминир. строка входит с нулев. вер-тью в ∀ оптим. смеш. стр 1го игрока.

▲] строка с номером i_1 дом-ся вып. комб. остал. строк: $a_{i_1 j} \le \sum_{i \ne i_1} \overset{\text{коэф-т вып. комб.}}{\widehat{p}_i} a_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $\sum_{i \ne i_1} p_i = 1$, $p_i \ge 0$, $i \ne i_1$ (1)

Вычеркнем i_1 строку в м-це A ⇒ получим м-цу $\widehat{A}$, нумерация строк i сохр-ся.

Д/ игры с $\widehat{A}$ ∃ реш-е в смеш. стр. $(\widehat{p}, q^0, v)$ ⇒ д/ этой тройки вып-на (∗) с м-цей $\widehat{A}$.

Расширим в-р $\widehat{p}$: на i_1 место поставим 0 ⇒

$$\Rightarrow p^0 = (\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_{i_1-1}, 0, \widehat{p}_{i_1+1}, \dots, \widehat{p}_m).$$

Утверждается, что (p^0, q^0, v) — реш-е игры с м-цей A. Необх. это д-ть. Проверим (∗)

$$A(p^0, j) = \widehat{A}(\widehat{p}, j) \overset{(*) \leftarrow \widehat{A}}{\ge} v, \quad j = \overline{1,n}$$

$\forall i \ne i_1$

$] \; i = i_1$

$= [\ast$ в-р

$= \widehat{A}(p',$

Сожидаемый

] в (1

выше кр

$A(i_1, q^0)$

$\Rightarrow A(i_1, q^0$

$\ast \; \forall$ в

— седл. т

стр. игро

//При стр

Пример

оптим. ст

∇ **1.12**

столбец

остал. ст

с нулев.

0)] некот.
вып. комб-
Тогда эта
о в некот.
е можно
ирование
ходит с нер.
о игрока.
вып. комб.
$\sum_{i\ne i_1} p_i = 1$,

$\mathcal{A} \Rightarrow$ получим
ся.
и. стр.
(∗) с м-цей $\hat{\mathcal{A}}$.
поставим 0 ⇒

н-е игры с
ерим (∗)

$\forall i \ne i_1 \quad \mathcal{A}(i, q^\circ) = \hat{\mathcal{A}}(i, q^\circ) \leqslant \vartheta$

] $i = i_1$ $\quad \mathcal{A}(i_1, q^\circ) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\, q_j^\circ \overset{(*)\leftarrow\hat{\mathcal{A}}}{\underset{(1)}{\leqslant}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\ne i_1} p_i a_{ij} q_j^\circ =$

$=$ [∢ в-р $p' = (p_i : i \ne i_1)$ — смеш. стр. в игре с $\hat{\mathcal{A}}$] $=$

$= \underset{\uparrow \text{ ожидаемый выигрыш 1го}}{\hat{\mathcal{A}}}(p', q^\circ) \overset{\swarrow \text{т.к. } q^\circ \text{ — оптим. смеш. стр}}{\leqslant} \vartheta \Longrightarrow$ 1я часть ∇ доказана

] в (1) строгое нер-во. Тогда все нер-ва выше кроме последнего сохр-ся, в нем последнем будет

$\mathcal{A}(i_1, q^\circ) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\, q_j^\circ \underset{\uparrow}{<} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\ne i_1} p_i a_{ij} q_j^\circ = \ldots = \vartheta \Longrightarrow$

т.к. хотя бы д/одного j $q_j^\circ > 0$

$\Longrightarrow \mathcal{A}(i_1, q^\circ) < \vartheta$

∢ ∀ оптим. смеш. стр. 1го — p^*. Тогда (p^*, q°) — седл. т. $\mathcal{A}(p, q) \Longrightarrow (p^*, q^\circ, \vartheta)$ — реш-е в смеш. стр. игры с $\mathcal{A}$. Из ∇1.10 $\Longrightarrow$ if $\mathcal{A}(i_1, q^\circ) < \vartheta \overset{\text{См. ∇1.10}}{\Longrightarrow} p_{i_1}^* = 0$ ■

//При строгом дом-нии не теряются смеш. стр.//

Пример $\mathcal{A}\begin{pmatrix} a & \dots & a \\ \hline \hline \\ \cancel{a} & \cancel{\dots} & \cancel{a} \end{pmatrix}$ За счет нестрогого дом-я вычеркиваем все строки кроме 1й ⇒ теряем много оптим. стр., т.к. здесь все смеш. стр — оптим.

∇1.12 (О доминировании столбцов)] некот. столбец м-цы $\mathcal{A}$ доминирует вып. комб. остал. столбцов м-цы. Тогда столбец входит с нулев. вер-тью в некот. оптим. смеш. стр.

2го игрока и его можно вычеркнуть. Если указ. дом-ние строгое, то этот столбец входит с нулев. вер-тью в $\forall$ оптим. смеш. стр. 2го игрока

▲ //Аналогично самостоятельно// ■ $\boxed{9}$

!

//К/р – вычеркнуть дом. стр. и столбцы при реш-и матрич. игры//

!К/р (н)

Пример

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 \leqslant & 5 \leqslant & 5\\ 1 & 3 \leqslant & 3 \leqslant & 3\\ 2 & 2 & 1 \leqslant & 2\\ \vee & \vee & \vee & \\ 2 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\hat{p}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\hat{q},$$

$$v=2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{2}(2)}_{\text{вып. комб.}}\geqslant(3)$$, где $(i), i=1,3,$ – строка i-ая

Реш-е исходной игры: $p^\circ=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)=q^\circ$

//нули на месте вычеркнутых строк//

//дом-ние можно исп-ть и в чист. стр., но без вып. комб.//

Упр $A=(a_{ij})_{m\times n}$, у нее есть заведомо седл. т. (в чист. стр. игра имеет реш-е), то можно вычеркивать доминируемые стр. и столбцы, получить $\hat{A}$, у $\hat{A}$ будет седл. т.

II. Графич. метод реш-я матр. игр с матрицами размеров $2\times n$ и $m\times 2$

* М-цы размера $2\times n$:

еркнуть. II

етопбещ вхо-

смеш. стр.

$\boxed{9}$

реш-и матрич.

(3 1)

(1 3

$, \frac{1}{2}) = \hat{q},$

$=2$

рока i-ая

$e, 0) = q^0$

иб.//

л.т. (в чист.

ивать доли-

будет седл.т.

игр с

n×2

смеш. стр. 1го

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \end{pmatrix}$$

p_1 – вер-ть выбора 1й стр.

$(1-p_1)$ – вер-ть выбора 2й стр.

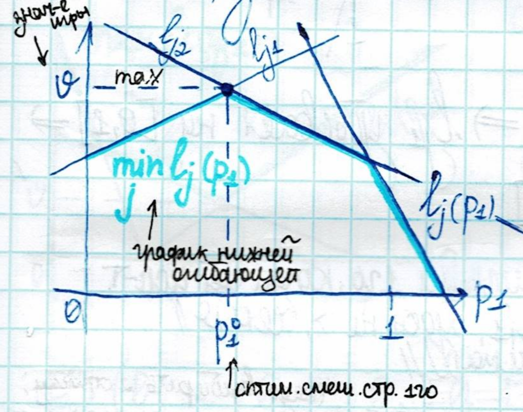
$0 \leq p_1 \leq 1$

Идея реш-я матр. игры: // См. ∇ 1.8' //

$$\vartheta = \max_{p \in P} \min_{1 \leq j \leq n} \mathcal{A}(p, j) = \max_{0 \leq p_1 \leq 1} \min_{j} [\underbrace{a_{1j} p_1 + a_{2j}(1-p_1)}_{\text{(афинная)}}]$$

$= l_j(p_1)$ – лин. ф-ция, ее угл. коэфф-т $k_j = a_{1j} - a_{2j}$ (коэфф-т при p_1)

Д/того, чтобы найти ϑ необх. построить лин. ф-ции, затем найти min от них, затем max от min



↑ оптим. смеш. стр. 1го

Оптим. смеш. стр. 1го:

$(p_1^0, 1-p_1^0)$

А что насчет 2го игрока?

а) $\exists$ $0 < p_1^0 < 1 \Rightarrow$ рис.

$\exists j_1: k_{j_1} \geq 0, l_{j_1}(p_1^0) = \vartheta$

$\exists j_2: k_{j_2} \leq 0, l_{j_2}(p_1^0) = \vartheta$

$\nexists$ след. ур-е д/ $q^0 = (0, \dots, \underset{\uparrow j_1}{q^*}, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow j_2}{1-q^*}, 0, \dots 0)$ – оптим. смеш. стр. 2го:

где q^* ищется из ур-я

$k_{j_1} q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0$ (2), $0 \leq q^* \leq 1$ – всегда найдется

Д-м, что q^0 – действительно оптим. смеш. стр. 2го.

Возьмем $\forall p_1$ $(0 \leq p_1 \leq 1)$ и покажем, что $\mathcal{A}(p, q^0) = \vartheta$.

$$\mathcal{A}(p, q^0) = q^* \overset{k_{j_1}}{\underline{l_{j_1}}}(p_1) + (1-q^*) \overset{k_{j_2}}{l_{j_2}}(p_1) \equiv \text{const}$$

1ый игр.

лин. ф-ция (угл. коэф-т k_{j_2})

2й игрок не позволит 1му выиграть >, чем ϑ

↑ вып. комб. лин. ф-ций

лин. ф-ция (угл. коэф-т k_{j_1})

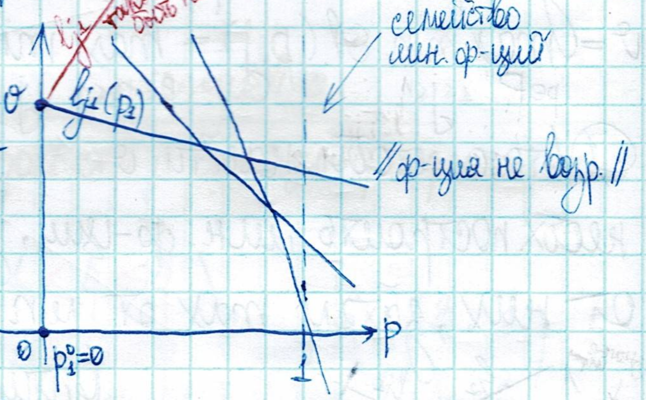
$\parallel$ $A(p, j_1)$ – ожидаемый выигрыш 1го игр.

↑ 2й игр.

(2) – коэфф-т при $p_1 = 0$ (вып. комб. при l_{j_1} и l_{j_2})

Чему равна const? Ф-ции проходят через т. max $\Rightarrow l_{j_1}(p_1^0) = \vartheta = l_{j_2}(p_1^0) = const \Rightarrow q^0$ – оптим. смеш. стр. 2го

б) $p_1^0 = 0$



1й игрок использует 2ую чист. стр.

Найдем оптим. чист. стр. 2го:

$\exists j_1: l_{j_1}(0) = \vartheta,\ k_{j_1} \leq 0 \Rightarrow l_{j_1}$ убывает на $[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow l_{j_1}(p_1) \leqslant \vartheta,\ \forall p_1 \in [0,1]$

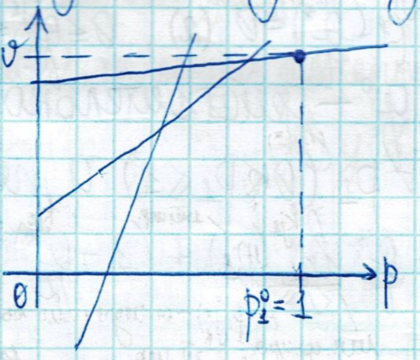
$\overset{\parallel}{A(p, j_1)}$ //ожид. выигрыш 1го, когда 2й исп-т смеш. стр. j_1, будет не >, чем ϑ//

//значит чист. стр. 2го – оптимал.//

(надо выбирать 2 строчку)

Т.о., у 1го игрока оптим. стр. 2, у 2го игрока оптим. чист. стр. $j_1 \Rightarrow (2, j_1)$ – седл. т.

в) $p_1^0 = 1$



Аналогично показ-ся, что тут есть седл. т. в чист. стр.

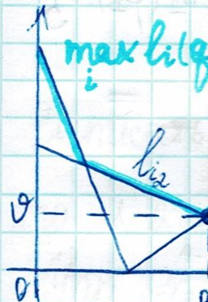
≮ м-цу

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{i1} \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

смеш. стр. 2го игрока: q_1 ↑ вер-ть выбора 1го столб

Нахожде

2го: пост



$p^0 = (0, \ldots$

p^* ищет

Обоснова

Пример

$A = \begin{pmatrix} \overset{(q^*)}{-1} \\ 2 \end{pmatrix}$

$l_1(p_1) = -p$

ходят через

$st \Rightarrow q^{0}-$

емейство
ин. ф-ций

р-ция не возр. //

т на $[0,1] \Rightarrow$

2ей исп-т
н ϑ //

выбирать 2 строчку;
у 2го игрока
едл. т.

H

К м-цу размера $m \times 2$:

$$\mathcal{A} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{смеш. стр. 2го игрока:} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{i1} \cdots & a_{i2} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \qquad 0 \leqslant q_1 \leqslant 1$$

q_1 ↑ вер-ть выбора 1го столбца

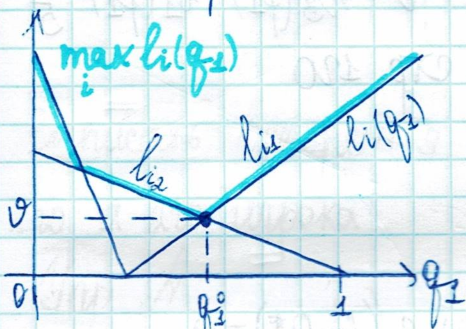
$1-q_1$ ↑ вер-ть выбора 2го столбца

/Сп V 1.10/

Св-во реш-я в смеш. стр:

$$\vartheta = \min_{q \in Q} \max_{1 \leq i \leq m} \mathcal{A}(i,q) = \min_{0 \leq q_1 \leq 1} \max_{i} \underbrace{\left[a_{i1} q_1 + a_{i2}(1-q_1)\right]}_{\text{лин. ф-ция, } = l_i(q_1)}$$

Нахождение знач-я игры и оптим. смеш. стр 2го: построение лин. ф-ций, найти max этих ф-ций, найти min max



Как найти оптим. смеш. стр. 1го?

$l_{i_1}(q_1^0) = \vartheta, \; k_{i_1} \geqslant 0$

$l_{i_2}(q_1^0) = \vartheta, \; k_{i_2} \leqslant 0$

$p^0 = (0, \ldots, 0, \underbrace{p^*}_{i_1}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1-p^*}_{i_2}, 0, \ldots, 0)$ — смеш. стр. 1го

p^* ищется из $k_{i_1} p^* + k_{i_2}(1-p^*) = 0 \Rightarrow p^0$ найдется

Обоснование аналогичное

10

Пример реш-я матр. игр граф. методом // К/р !

$$\mathcal{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (q^*) & (0) & (1-q^*) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (p_1) \\ (1-p_1) \end{array}$$

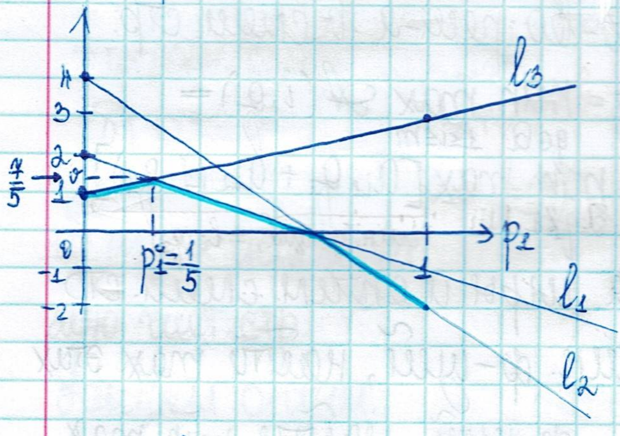
// седл. т. нет $\Rightarrow$ нет реш-я в чист. стр. //

$l_j(p_1)$ — ф-ции, соотв-щие столбцу

$l_1(p_1) = -p_1 + 2(1-p_1) = 2 - 3p_1$

$l_2(p_1) = -2p_1 + 4(1-p_1) = 4 - 6p_1$

$l_3(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1 = 1 + 2p_1$



max в пересечении l_1 и l_3:

$l_1(p_1) = l_3(p_1)$

$2 - 3p_1 = 1 + 2p_1 \iff$

$\iff p_1^0 = \frac{1}{5}$

$\vartheta = l_3(p_1^0) = l_1(p_1^0) = \frac{7}{5}$

$p^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ — оптим. смеш. стр. 1го

$q^0 = (\overset{\nwarrow}{q^*}, 0, \overset{\nearrow}{1-q^*})$

//$\underline{1}$ и $\underline{3}$, т.к. $l_{\underline{1}} \cap l_{\underline{3}}$//

$k_1 = -3, \quad k_3 = 2$

Составим ур-е (2): $-3q^* + 2(1-q^*) = 0$,

$$q^* = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow q^0 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$

Матрич. игра полностью решена.

Проверка — с помощью усл-я (*):

$\mathcal{A}(p^0, j) \geqslant \vartheta = \frac{7}{5}, \ \forall j = \overline{1,3}$

1ый ст.: $\frac{1}{5}(-1) + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = \vartheta$

2ой: $\frac{1}{5}(-2) + 4 \cdot \frac{4}{5} > \frac{7}{5} = \vartheta$

3й: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = \vartheta$

Все выполнено!

$\mathcal{A}(i, q^0) \leqslant$

$\mathcal{A}(1, q^0) =$

$\mathcal{A}(2, q^0) =$

$\Rightarrow$ (*) вы

Упр ∗ А

Упр $\mathcal{A}_{2\times3}$

Выписать

1го и 2го

Упр $\mathcal{A}_{2\times3}$

—//—

III. Сведен

деист

∃ имеет

положим, ч

ресечении

$l_3(p_1)$

$1 + 2p_1 \Leftrightarrow$

$) = l_1(p_1^0) = \frac{7}{5}$

$= 0,$

ена.

(*):

$\frac{}{5} = \frac{7}{5} = v$

олнено!

$\mathcal{A}(i, q^0) \leq v, \ i = \overline{1,2}$

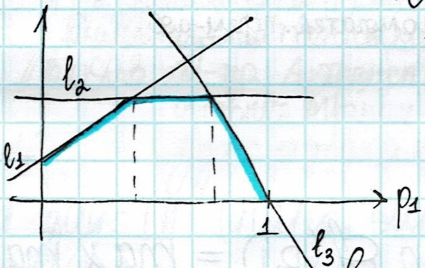
$\mathcal{A}(1, q^0) = \frac{7}{5} = v$

$\mathcal{A}(2, q^0) = \frac{7}{5} = v$ Тоже все вып-но! $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (*) вып-но!

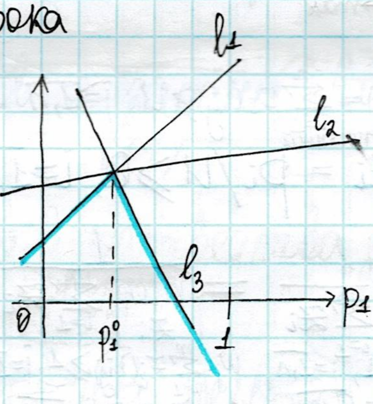
Упр ∗ $A^T_{3\times2}$ и решить ее матр. игру

Упр $\mathcal{A}_{2\times3}$ $l_2 \parallel p_1$



Выписать все реш-я игры — все оптим. смеш. стр. 1го и 2го игрока

Упр $\mathcal{A}_{2\times3}$



—//—

III. Сведение реш-я матр. игры к паре двойственных задач (ДЗ) лин. программ-я (ЛП)

∃ имеется игра с м-цей $\mathcal{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Предположим, что $v > 0$ // if м-ца имеет отриц. эл-ты, то можно все ее эл-ты сделать полож. //

На этой стр. только название билета и предполож.

Упр

Упр

Подсказка: условие (*)

$\measuredangle$ $B = (a_{ij} + C)$, $C = const > 0 \Longrightarrow \underline{v(B) = v(A) + C}$

Оптим. ^смеш.^ стр. в играх совпадают //Д-ты//, где $(p^\circ, q^\circ, v(A))$ — седл. т.; теор. задача №2

$(p^\circ, q^\circ, v(A) + C)$ — реш-е игры с м-цей B

$\measuredangle$ $\min(3, 1, 5) \overset{\ominus}{} // 1$ можно превратить в max

$\ominus \max \boxed{u}$ — вспомогател. перем-ая

$u \leq 3$

$u \leq 1$

$u \leq 5$

$$v \overset{\text{Сл.} \ \Downarrow 1.8'}{=} \max_{p \in P} \underbrace{\min_{1 \leq j \leq n} A(p, j)}_{\min \to \max} = \max_{p \in P} \max_{u \leq A(p,j),\, j = \overline{1,n}} u =$$

$$= \boxed{\max_{p,u:\ p \in P,\ A(p,j) = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} \geq u,\ j = \overline{1,n}} u} \ominus$$

$$\ominus \Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{max. знач. } u \text{ — это } v > 0}}{u} > 0,\ \overset{\text{в-р вероятностный}}{z}: z_i = p_i / u \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{u} =$$

$$= \frac{1}{u} \Big] = \max_{\substack{z:\\ \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} \geq 1,\ j = \overline{1,n},\\ z_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}}} \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i} = \frac{1}{\min\limits_{\substack{z:\\ w_j:\ \sum_{i=1}^{m} z_i \boxed{a_{ij}} \geq 1,\ j = \overline{1,n},\\ z_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}}} \sum_{i=1}^{m} z_i} \ \text{(I)}$$

— задача ЛП

основное огранич-е

(max-ся ^(min-ся)^ мин. ф-ция при наличии мин. огранич-й)

переходят в коэфф-ты целевой ф-ции w_j

//зад. имеет реш-е, т.к. maxmin стр. всегда ∃//

Предположим, что мы решили зад. на $\overset{(I)}{\min}$ и нашли оптим. реш-е z° ⇒ мы нашли знач-е игры $v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} z_i^\circ}$, нашли

оптим. см

стр.) //веро

найти оп

найти v

$$= \frac{1}{\max\limits_{\substack{w:\\ z_i:\ \sum_{j=1}^{n} \boxed{a_{ij}} w_j \leq \boxed{1},\ i = \overline{1,n}\\ w_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}}} \sum_{j=1}^{n} w_j} \ (\text{II}$$

перехо

в коэфф

ф-ции

∃ реш

⇒ w° - опт

стр. 2го и

Т.е., реш

реш-е и

Д/оптим.

кости. Д-ты

($\Downarrow$ 1.10)

∃ z°, w

то д/опт

Но, if $\sum_{j=1}$

Аналогич

$\Rightarrow v(B)=v(A)+C$

ют //Д-ть//,

теор. задача №2

с м-цей B

ить в max

$=$

$j, j=\overline{1,n}$

$; \sum_{i=1}^{m} z_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{u} =$

I) — задача ЛП

основные огранич-е

(min-ся)
(max-ся мин. ф-ция при наличии мин. огранич-й)

решени зад.

-е z^0 $\Rightarrow$

$\frac{1}{\sum z_i^0}$, нашли

оптим. смеш. стр. 1го игрока (maxmin стр.) //вернемся к перем. до замены// $p^0 = \overset{\text{оптим. и}}{v} z^0$; чтобы найти оптим. смеш. стр. 2го игрока, необх. найти $v \overset{\text{Сл. ∇1.8'}}{=} \min_{Q} \max_{1\le i\le m} A(i,q) =$ //аналогично// $=$

$$= \frac{1}{\max_{w:} \sum_{j=1}^{n} w_j} \quad (\text{II})$$

$$z_i: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \le 1, \; i=\overline{1,m},$$

$$w_j \geqslant 0, \; j=\overline{1,n}$$

переходит в коэфф-т целевой ф-ции z_i

— по отнош-ю к (I) явл-ся ДЗ

//т.е. задачи (I) и (II) на min и max явл-ся взаимнодвойственными//

//в ДЗ: м-ца A трансп., основные огранич-я поменяли знак, задача на max, а не min

$\exists$ решили зад. (II) (напр, симплекс-методом) $\Rightarrow$ $\Rightarrow w^0$ — оптим. реш-е $\Rightarrow q^0 = v w^0$ — оптим. смеш. стр. 2го игрока

Т.е., решив 2 задачи ЛП, мы получаем реш-е игры

Теор. зад №2

Д/оптим. реш-й справедливо св-во доп. нежест-кости. Д-ть, используя это же св-во д/матрич. игр (∇1.10) Упр

$\exists$ z^0, w^0 — оптим. реш-я. Тогда, if $z_i^0 > 0$, то д/оптим. реш-я зад. (II) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0 = 1$.

ему соотв. огранич-е в ДЗ

Но, if $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0 < 1 \Rightarrow z_i^0 = 0$ (св-во доп. нежест.)

Аналогично: if $w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} = 1$,

if $\sum_{i=1}^{m} z_i a_{ij} > 1 \Rightarrow w_j^0 = 0$

§6. Реш-е игр с вып. (вогнут.) ф-цией выигрыша.

мн-во стр. двух игроков

$\measuredangle$ антаг. игру $\Gamma = \langle X, Y, \mathcal{F}(x,y) \rangle$.

Известно, что if ф-ция вогнуто вып. на произв-и вып. компактов (непр., вогн. вып., вогн. по x, вып. по y), то Γ имеет реш-е, т.к. ф-ция $\mathcal{F}$ имеет седл. т. ($\nabla 1.3$)

If ф-ция по каждой перем-й вып., то игры такие тоже можно решать.

Опр Игра Γ наз-ся игрой с вып. ф-цией выигрыша, if $\mathcal{F}(x,y)$ непр. на $X \times Y$, где X, Y — вып. компакты конечном. евклид. пр-в, $\forall \underline{x} \in X$ $\mathcal{F}(\underline{x},y) \smile_y$, $\forall \underline{y} \in Y$ $\mathcal{F}(x,\underline{y}) \smile_x$

Игра Γ наз-ся игрой с вогн. ф-цией выигрыша, if $\mathcal{F}(x,y)$ непр. на $X \times Y$, где $X \times Y$ — вып. компакты конечномер. евклид. пр-в, $\forall \underline{x} \in X$ $\mathcal{F}(\underline{x},y) \frown_y$, $\forall \underline{y} \in Y$ $\mathcal{F}(x,\underline{y}) \frown_x$

Наша цель — научиться решать такие игры в смеш. стр.

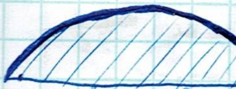
] Z — вып. мн-во в евклид. пр-ве.

Опр Т

мн-ва $\tilde{Z}$

$z^0 = \vartheta z' +$

Пример



Мн-во

$\forall$ вып.

кр. т.

Утв

пр-ве (т.е.

$Z^{ext} \neq \emptyset$.

▲ Допусти

(было доказан

— строго

Д-м, что

положим

$\Rightarrow \exists z' \neq$

$\measuredangle$ $h(z^0) =$

в $z^0 \to \max$

$< \vartheta h(z^0) +$

т.) ф-цией

ироков

$F(x,y)>$.

нуто вып.

кр., вогн.

Г имеет

т. ($\sqrt{}$1.3)

вып., то

мать.

крыша, if

вып. компакты

$\forall y \in Y$

й выигрыша,

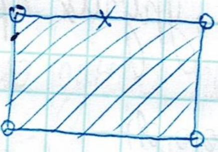
вып. компак-

ать такие

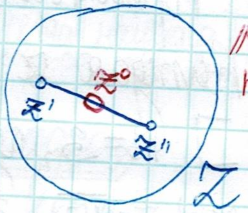
пр-ве.

Опр Т. $z_0 \in Z$ наз-ся крайней т. мн-ва Z, if $\neg\exists\, z' \neq z'' \in Z$, $\neg\exists\, \vartheta \in (0,1)$: $z^0 = \vartheta z' + (1-\vartheta) z''$

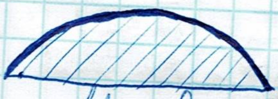
Пример



о – крайная т.
х – не крайная т.



//такого быть не может//



бесконечное число кр. т. (на дуге)

Мн-во всех крайних точек мн-ва Z — Z^{ext}

$\forall$ вып. компакт имеет хотя бы одну кр. т.

Утв $\exists\, Z$ – вып. компакт в евклид пр-ве (т.е. вып. замкн. огр. мн-во). Тогда $Z^{ext} \neq \emptyset$.

▲ Допустим, что $Z \subset E^m$ (было доказано в Упр). ∢ $h(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2$ — квадрат евклид. $\|\cdot\|$ — строго вып. ф-ция. Возьмем т. $z^0 \in \operatorname{Argmax}_{z \in Z} h(z)$. Д-м, что т. z^0 – кр. т. мн-ва Z. Предположим противное: $\exists\, z^0$ – не кр.т. мн-ва $Z \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists\, z' \neq z'' \subset Z$, $\exists\, \vartheta \in (0,1)$: $z^0 = \vartheta z' + (1-\vartheta) z''$. ∢ $h(z^0) = h(\vartheta z' + (1-\vartheta) z'') \overset{\text{стр. вып-ть}}{<} \vartheta h(z') + (1-\vartheta) h(z'') \overset{\text{в } z^0 \to max}{\leqslant} \vartheta h(z^0) + (1-\vartheta) h(z^0) = h(z^0) \Rightarrow h(z^0) < h(z^0) \Rightarrow$ (!?) ■

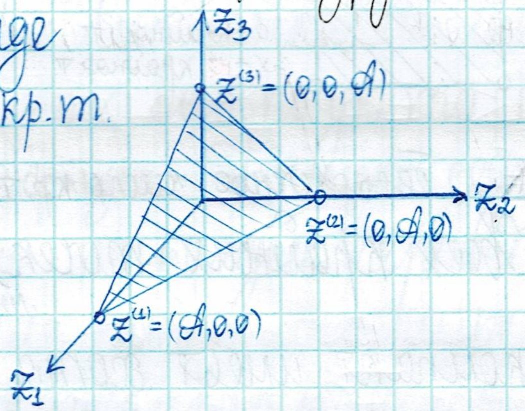
Пример ∃ $Z = \{ z \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} z_i = \mathcal{A}, \underset{\uparrow\ \text{в } i\text{й пункт}}{z_i} \geq 0,$ $i=\overline{1,n}\}$, где $\underset{\llcorner\ \text{кол-во ресурсов, д распред-ся по } n \text{ пунктам}}{\mathcal{A}} > 0$

Крайние т.: $z^{(i)} = (0, \dots, 0, \underset{i\text{й пункт}}{\mathcal{A}}, 0, \dots, 0), i=\overline{1,n}$

Упр Каждая $z^{(i)}$ явл-ся кр.т., других кр. т. нет. Д-ть

∃ $n=3$, где

$z^{(i)}, i=\overline{1,3}$ – кр.т.

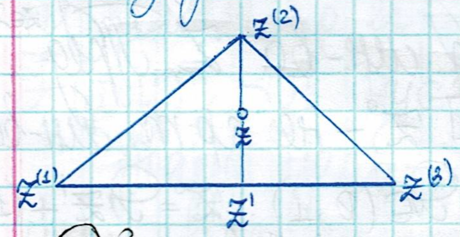


Т 1.13 (Каратеодори) ∃ $Z \subset E^m$ – вып. компакт. Тогда д/∀ т. $z \in Z$ ∃ кр.точки $z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in Z^{ext}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$:

$z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{(i)}$, $k \leq m+1$

▲ //Без док-ва// ■

Упр



z – вып. комб. вершин (кр. точек)

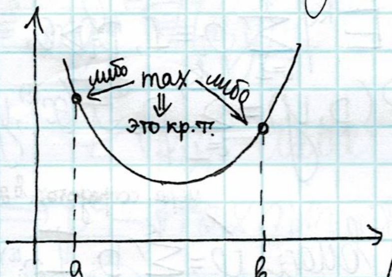
z' = вып. комб. $z^{(1)}$ и $z^{(3)}$,

z = вып. комб. z' и $z^{(2)}$

Подробно расписать

Лемма 5. $\exists$ $h(z)$ опред. и непр. на вып. комп. Z евклид. пр-ва. Также $h(z)$ вып. Тогда $\max\limits_{z\in Z} h(z) = \max\limits_{z\in Z^{ext}} h(z)$ //всегда найдется кр.т., где дост-ся max вып. ф-ции//

//If $\sphericalangle$ ф-цию одной перем-й, то очевидно//



▲ Из усл-я непр-ти на вып. компакте $\Rightarrow \exists z^\circ$:
$h(z^\circ) = \max\limits_{z\in Z} h(z)$

По пред. $\nabla \Rightarrow z^\circ = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i z^{(i)}, \lambda_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, где $z^{(i)}$ – кр. т., $z^{(i)} \in Z^{ext}$.

$$\underline{h(z^\circ)} = h\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{(i)}\right) \overset{\text{св-во вып. ф-ций}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i h(z^{(i)}) \leqslant \max_{1\le i\le k} h(z^{(i)}) \leqslant$$
$$\leqslant \underline{h(z^\circ)} \Rightarrow \max_{1\le i\le k} h(z^{(i)}) = h(z^\circ) \Rightarrow$$ max дости-ся на некот. кр. т. мн-ва Z ■

$\exists$ Γ – игра с вып. ф-цией выигрыша, $\mathcal{F}$ вып. по каждой пер-й (по x (при фикс. y) и по y (при фикс. x)).

!Зам По совокуп-ти перем-х ф-ция мб и невып. Напр., $\mathcal{F}(x,y) = xy$ – мн. по каждой перем-й, вып. по каждой перем., но по совокуп-ти перем-х – невып. (посмотреть на график, проверить, что не вып., не вогн.)

], также, X^{ext} — мн-во крайних т. — конечно, $X^{ext} = \{x^{(1)},\dots,x^{(k)}\}$, где X — вып. компакт евклид. пр-ва.

Д/ того, чтобы решить игру в смеш. стр., ✗ вспомог. ф-цию. Нам понадобятся (вероятн.) в-р $p = (p_1,\dots,p_k) \in \mathcal{P} = \{p \in E^k \mid \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i=\overline{1,k}\}$ и соотв. ф-ция $\Phi(p,y) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i \mathcal{F}(x^{(i)}, y)$, где $x^{(i)}$ — кр. т. мн-ва X

(] в Γ исп-ся смеш. стр. вида $\overset{\text{мера, сосредоточ. в } x^{(i)}}{\varphi} = \sum\limits_{i=1}^{k} \underset{\text{с вер-тью } p_i \text{ выбирается т. } x^{(i)}}{p_i I_{x^{(i)}}}$. Тогда усредняя ф-цию $\mathcal{F}$ по мере φ $\Rightarrow$ $\Phi(\varphi, y) = \int\limits_X \mathcal{F}(x,y)\,d\varphi(x) = \mathcal{F}(\varphi, y)$ (1)

Ф-ция Φ опред-на на $\overset{\text{вер. в-рн}}{\mathcal{P}} \times \overset{\text{вып. комп.}}{Y}$, явл-ся лин-й по p и вып. по y $\Rightarrow$ Φ — вогнуто-вып. $\Rightarrow$ (⇒ вогн. по p) $\Rightarrow \{\nabla 1.3\} \Rightarrow$ ф-ция имеет седл. т.

∇1.1н.] Γ — игра с вып. ф. в., мн-во кр. т. $X^{ext} = \{x^{(1)},\dots,x^{(k)}\}$ — конечно. Тогда игра имеет реш-е в смеш. стр. след. вида: $(\overset{\text{спец. стр.}}{\varphi^0} = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i^0 I_{x^{(i)}},\ \overset{\text{чист. стр. 2го}}{y^0},\ \overset{\text{знач-е игры}}{\overline{\vartheta}})$, где (p^0, y^0) — седл. т. (maxmin стр. Φ) ф-ции $\Phi(p,y)$, y^0 — minmax (оптим.) чист. стр. 2го,

айних т. –
е X – вып.

у в смеш.
понадобятся
$\sum p_i=1,\ p_i\geqslant 0,$
$=\sum_{i=1}^{k} p_i \mathcal{F}(x^{(i)},y),$
мера, сосредоточ. в $x^{(i)}$
$\varphi=\sum_{i=1}^{k} p_i I_{x^{(i)}}$.
с вер-тью p_i выбирается т. $x^{(i)}$

(x)
$\| \mathcal{F}(\varphi,y)$ (1)
вып. комп.
авл-ся мн-й
уто-вып. ⟹
т.

.в., мн-во
. Тогда игра
д. вида.
(maxmin стр. Φ)
) – седл. т.
(оптим.)
чисх. стр. 220,

$\vartheta=\overline{\vartheta}=\min\limits_{Y}\max\limits_{X}\mathcal{F}(x,y)$

▲ $\forall y\in Y\ \ \max\limits_{p\in P}\Phi(p,y)=\max\limits_{x\in X}\overset{\text{вып. по } x}{\mathcal{F}(x,y)}\overset{\text{лемма 5}}{=}\max\limits_{1\leq i\leq k}\mathcal{F}(x^{(i)},y)$ (2)

Д-м это рав-во.

$$\max_{P}\Phi(p,y)=\max_{P}\sum_{i=1}^{k}p_i\mathcal{F}(x^{(i)},y)\overset{\text{Т1.7.}}{=}\max_{1\leq i\leq k}\mathcal{F}(x^{(i)},y)\overset{\text{Л.5}}{=}\max_{X}\mathcal{F}(x,y)$$

$\Phi(p,y)$ имеет седл. т. на $P\times Y$ $(p^0,y^0)\Longrightarrow$
$\Longrightarrow p^0$ – maxmin стр. ф-ции $\Phi\Longrightarrow y^0$ – minmax стр., т.е.

$$\min_{Y}\Phi(p^0,y)\overset{\text{Т.1.1}}{=}\max_{P}\min_{Y}\Phi(p,y)\overset{\text{Т1.1}}{=}\min_{Y}\max_{P}\Phi(p,y)=$$

$\overset{(2)}{\|}\ \min\limits_{Y}\max\limits_{X}\mathcal{F}(x,y)=\overline{\vartheta}$

$$=\max_{P}\Phi(p,y^0)\overset{(2)}{=}\max_{X}\mathcal{F}(x,y^0)$$

$$\Longrightarrow\min_{Y}\Phi(p^0,y)\overset{(1)}{=}\min_{Y}\mathcal{F}(\varphi^0,y)=\overline{\vartheta}=\max_{X}\mathcal{F}(x,y^0)\Rightarrow$$

$\overset{\sqcup\sqcup}{\Longrightarrow}\mathcal{F}(\varphi^0,y)\leqslant\overline{\vartheta}\leqslant\mathcal{F}(x,y^0),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y$ (*) –
– усл-е д/ $(\varphi^0,y^0,\overline{\vartheta})$ //Т1.6// ⟹ эта тройка –
– реш-е в смеш. стр. игры с ф-цией $\tilde{\mathcal{F}}$ ■

Аналогично
д/вогн. случая. ∃ Γ – игра с вогн. ф.в. ($\mathcal{F}\cap_x,\cap_y$,
непр. на произв-и вып. комп.), мн-во кр.т.
$Y^{ext}=\{y^{(1)},\dots,y^{(k)}\}$. ∀ вер. в-ры $q=(q_1,\dots,q_k)\in Q$,
ф-цию $\Phi_1(x,q)=\sum_{j=1}^{k}q_j\mathcal{F}(x,y^{(j)})$ – вогн. по x,

мин. по $q \Rightarrow$ есть седл. т.

▽1.15.] Γ − игра с вогн. ф. в., $\mathcal{Y}^{ext} = \{y^{(1)}, \dots, y^{(k)}\}$ − конечно. Тогда игра имеет реш-е в смеш. стр. след. вида:

$(x^0, \psi^0 = \sum_{j=1}^{k} q_j^0 I_{y^{(j)}}, \underline{v})$, где пара (x^0, q^0) − седл. т. $\Phi_1(x, q)$, x^0 − maxmin стр., $\underline{v} = \max_X \min_Y \mathcal{F}(x,y) = \min_y \mathcal{F}(x^0, y)$

△ // Аналогично // ■

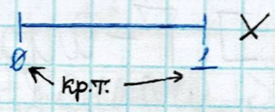
Пример (уже был)] $\mathcal{F}(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ (вып. по обеим перем.), $X = [0,1]$, $\mathcal{Y} = [0,1]$

$\mathcal{F}_{xx} = 4 > 0$, $\mathcal{F}_{yy} = 2 > 0 \Rightarrow$ ф-ция стр. вып. по обеим перем-м.

$\overline{v} = \min_{0 \le y \le 1} \max_{0 \le x \le 1} \mathcal{F}(x,y) = \frac{4}{9}$, $y^0 = \frac{2}{3}$, $\underline{v} = 0$.

оптим. смеш. стр. 1го

$\varphi^0 = p_1^0 I_0 + (1 - p_1^0) I_1 = ?$



$p_1^0 = ?$ //компонента седл. т.//

в ней ф-ция достигает min

(p_1^0, y^0) − седл. т. ф-ции

Φ − стр. вып. по $y \Rightarrow$ найдем p_1^0

$\Phi(p_1, y) = p_1 \mathcal{F}(0,y) + (1-p_1)\mathcal{F}(1,y) =$
$= p_1 y^2 + (1-p_1)(2 - 3y + y^2)$

$\Phi(p_1^0, y)$ достигает min в $y = y^0$

$\Phi_y(p_1^0, y$

$\Phi_y(p_1^0, y$

$\Rightarrow 2p_1^0 \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \varphi^0 = \frac{5}{5-}$

§7. Исс

1) Моде

] n

−пункты

сквозь п

Нап. А

$A > 0$ − к

Стра

$x \in X$ −

$x_i \ge 0, i = 1,$

Защ. и

аналогичн

стр.

с в-рой y

< как

р. в., $y^{ext} =$

игра имеет

(x^0, y^0) – седл.

$\underline{v} = \max_{x} \min_{y} F(x,y) =$

$-y^2, X=[0,1],$

ция стр. вып.

$\frac{2}{3}, \underline{v}=0.$

x

$,y) =$

y^0

$\Phi_y(p_1^0, y^0) = 0$

$\Phi_y(p_1^0, y^0) = 2p_1^0 y^0 + (1-p_1^0)(-3+2y^0) = 0$ //y^0 – изв.// ⇒

⇒ $2p_1^0 \frac{2}{3} + (1-p_1^0)(-3+\frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow p_1^0 = \frac{5}{9}$

⇒ $\nu^0 = \frac{5}{9} I_0 + \frac{4}{9} I_1$ – оптим. смеш. стр. 1го

§7. Исследование игр-х моделей

28/09

1) Модель „$\overset{\text{Нап.}}{\text{Нападение}}$ – $\overset{\text{защ.}}{\text{защита}}$" (игр. зад. распред-я ресурсов)

∃ n пунктов с номерами $i=\overline{1,n}$ – – пункты возможн. прорыва ср-в нападения сквозь пункты, 2 защищает защит.

Нап. имеет в своем распоряжении $A>0$ – кол-во ресурсов (ресурс ∞ делимый) можно дробить сколь угодно мелко

Страт. нап. – в-р $x=(x_1,\dots,x_n)$, // на пункт i нап. отправляет кол-во средств x_i //

$x\in X$ – мн-во стр. нап., где $X=\{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geq 0, i=\overline{1,n}\}$.

Защ. имеет в своем распоряжении $B^{>0}$ ср-в; аналогично распределяет ср-ва защ. в соотв. с в-ром $\overset{\text{стр. защ.}}{y}=(y_1,\dots,y_n) \in Y=\{y \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, y_i \geq 0, i=\overline{1,n}\}$

? как измер-ся эффект-ть ср-в защиты

на i-м пункте $\exists$ д/ iго пункта есть коэфф-т μ_i – кол-во ср-в нап., к может уничтожить 1 единица ср-в защ.

// Антаг. игра: нап – 1й, защ – 2й; ф-ция выигрыша нап.? //

На iый пункт нап. выделяет кол-во ср-в x_i, защита – y_i. Возможны 2 случая:

$$x_i \geqslant \underbrace{\mu_i y_i}_{\text{кол-во ср-в нап. будет уничтожено защ. на этом пункте}}, \quad \overbrace{x_i - \mu_i y_i}^{\text{(кол-во сил) разность прорывается на этом пункте}} \geqslant 0 \quad \text{или}$$

$$x_i < \underbrace{\mu_i y_i}_{\text{кол-во ср-в защ. дост., чтобы уничтожить все нап. на этом пун.}} \Rightarrow 0 \text{ ср-в нап. прорывается}$$

Объединяя 2 случая: на этом пункте прорывается $\max\{x_i - \mu_i y_i, 0\}$

ф-ция выигрыша нап. → $F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max\{x_i - \mu_i y_i, 0\}$, т.е. выигрыш нап. – это кол-в ср-в нап., к прорвалось через все пункты.

антаг. игра → $\Gamma = \langle \underbrace{X}_{\text{нап.}}, \underbrace{Y}_{\text{защ.}}, \underbrace{F(x,y)}_{\text{ф-ция выигр. нап.}} \rangle$ – игра в норм. форме (игроки выбирают стр. независ. друг от друга)

мн-во стр-й

// Наша цель – изучить игру //

Заметим, что $F(x,y)$ вып. по перем-м x и y: if взять i-ое слагаемое $\max\{x_i - \mu_i y_i, 0\}$, где $(x_i - \mu_i y_i)$ – лин. ф-ция, max лин. ф-ций 0 – вып. ф-ция $\Rightarrow$ Σ вып. ф-ций = вып. ф.

Без пот

$\geqslant \mu_n > 0$ – у

наиболее з

// Исследован

а) $\underline{v} = \max\min$

$x \in X \quad y \in$

maxmin стр., реализ. внешн

$x^0 = x^{(n)} = ($

на слабейш

нап.

$\forall$ стр. x

сначала

случай $i_0 =$

$i_0 = n$

с i_0 определ

$y_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{\mu_i} \\ В - \\ 0, \end{cases}$

на iй пункт

$W(x) = \min_{y \in Y}$

$- \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i}) + \sum$

$\leqslant \sum_{i=i_0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} x$

есть коэфф-т

жет уничто-

выигрыша

кол-во ср-в

случая:

этом пункте

ся

. на этом пун.

м пункте

е. выигрыш.

прорвалось

норм. форме

выбирают стр.

друг от друга)

по перем-м

$\max\{x_i - \mu_i y_i, 0\}$,

х мин. ф-ции

ций = вып. ф.

Без потери общ-ти, считаем, что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n > 0$ — упорядоч. коэфф-ты $\Rightarrow$ 1й пункт наиболее защищен, n-й — наименее.

// Исследование в чистых и смеш. стр. //

а) $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = \max\{\mathcal{A} - \mu_n B, 0\}$

maxmin стр., реализ. внешн. max

$x^0 = x^{(n)} = (0, \ldots, 0, \mathcal{A})$ — все силы направл-ся на слабейший пункт

нап.

∢ ∀ стр. $x \in X$, посчитаем знач-е min. Но сначала ∢ i_0: $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i} \leq B < \sum\limits_{i=1}^{i_0} \frac{x_i}{\mu_i}$ (возможен случай $i_0 = 1 \Rightarrow$ 1ое нер-во отсутст.;

$i_0 = n+1 \Rightarrow$ 2ое отсутствует). В соотв.

минимизирующая

с i_0 определим стр. д/защ. $y(x)$:

//смысл стр: защ. стремится уничтожить силы на 1х пунктах, где у нее эффект. ср-ва защ. (когда μ_i самые большие)//

$$y_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = \overline{1, i_0-1}, \\ B - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i}, & i = i_0, \\ 0, & i > i_0 \end{cases}$$

на i-й пункт

//сколько направл-ся на каждый пункт ср-в защиты//

какой будет выигрыш нап.?

$$W(x) = \min_{y \in Y} \mathcal{F}(x,y) \leq \mathcal{F}(x, y(x)) = \underline{x_{i_0}} - \mu_{i_0}\left(B - \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{x_i}{\mu_i}\right) + \underline{\sum_{i=i_0+1}^{n} x_i} = \underline{\sum_{i=i_0}^{n} x_i} + \sum_{i=1}^{i_0-1} \underbrace{\frac{\mu_{i_0}}{\mu_i}}_{\leq 1 \text{ (из-за упорядоч-ти)}} x_i - \mu_{i_0} B \leq$$

$$\leq \underline{\underline{\sum_{i=i_0}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{i_0-1} x_i}} - \mu_{i_0} B = \underline{\underline{\mathcal{A}}} - \mu_{i_0} B \leq \mathcal{A} - \underbrace{\mu_n}_{\text{наим. коэфф-т}} B \leq$$

$\leqslant \max\{A-\mu_n B, 0\} = \min\limits_{y\in Y}\max\{A-\mu_n \underset{\sim}{y_n}, 0\} =$
$= \min\limits_{y} F(x^{(n)}, y) = W(x^{(n)}), \forall x\in X \Rightarrow x^{(n)}$ – maxmin стр. $\Rightarrow \underline{\vartheta} = \max\{A-\mu_n B, 0\}$

б) $\overline{\vartheta} = \min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} F(x,y) = \max\left\{A - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}, 0\right\}$

minmax стр., реализующ. внешн. min ↓
$y^0: y_i^0 = \frac{B}{\mu_i\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}, i=\overline{1,n}$ //защ. чем больше направляет ср-в на $\tilde{i}$-й пункт, тем меньше он защищен //

If $\mu_1=\ldots=\mu_n>0$ (эффект-ть защ. на всех пунктах одинакова) $\Rightarrow y_i^0 = \frac{B}{n}, i=\overline{1,n}$

У мн-ва X есть кр. т. – стр. $x^{(i)} = (0,\ldots,\underset{\overset{\downarrow}{i}}{A},\ldots,0)$, $i=\overline{1,n}$, – концентрированные удары по i-му пункту

$\forall y\in Y \max\limits_{x\in X} F(x,y) \overset{\text{Лемма 5 (пред. лекц.)}}{=} \max\limits_{i=\overline{1,n}} F(x^{(i)},y)$ (1)

$\overline{\vartheta} = \min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X} F(x,y) \overset{(1)}{=} \min\limits_{y\in Y}\max\limits_{i=\overline{1,n}} F(x^{(i)},y) =$
$= \min\limits_{y\in Y}\max\limits_{i=\overline{1,n}} \underbrace{\max\{A-\mu_i y_i, 0\}}_{\text{кол-во ср-в нападения, д прорывается только на i-м пункте}} = \min\limits_{y\in Y}\max\{A - \underset{\sim}{\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i y_i}, 0\} = \max\{A - \max\limits_{y\in Y}\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i y_i, 0\} =$
$= \max\{A - B\max\limits_{y}\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i \frac{y_i}{B}, 0\} = [\overset{\text{вер-й в-р}}{p}: p_i = \frac{y_i}{B} \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \frac{\overset{=B}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}}{B} = 1] = \max\{A - B\max\limits_{p\in P}\min\limits_{i=\overline{1,n}} \mu_i p_i, 0\}$ ⊜

// Конец

$\mu_i > 0, i = 1,$

$\Rightarrow \vartheta = ma$
pєP

⊜ max{

из замены
$y^0 = Bp^0 =$

Когда в

защ. оч

✓] $B \geqslant A$

//If защ. имее

$\overline{\vartheta} = \max\{$

✓] $B < \vartheta$

$\overline{\vartheta} = \max\{$

$= A - \mu_n B$

мист. стр. н

// Конец д/н $\Longrightarrow$ матр. игра $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$, $\mu_i > 0,\ i = \overline{1,n}$ //игра „Полиц.-прест.“//

$$\Longrightarrow \vartheta = \max_{p \in P} \min_{i=\overline{1,n}} \mu_i p_i = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \text{ где } p^0 : p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \ //$$

$$\circleddash \ \max\left\{\mathcal{A} - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right\}, \text{ что и треб-сь.}$$

из замены

$$\overset{\downarrow}{y^0} = B p^0 \Longrightarrow y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}},\ i = \overline{1,n}, \text{ что и треб-сь.}$$

Когда в игре имеется седл. т.? Когда у защ. оч много сил.

✓ $\rceil\ B \geqslant \mathcal{A} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k} \Longrightarrow$ седл. т. есть, реш-е ант. игры в чист. стр. есть

//If защ. имеет $n\mathcal{A}$ сил ($\forall\ \mathcal{A}$ напр. на $\forall$ пункт), то защ. в состоянии всех уничтожить//

$$\overline{\vartheta} = \max\left\{\underbrace{\mathcal{A} - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}}_{\leqslant 0}, 0\right\} = 0 \geqslant \underline{\vartheta} \geqslant 0 \Longrightarrow \overline{\vartheta} = \underline{\vartheta} = 0$$

//неинтересно д/нап. :(//

✓ $\rceil\ B < \mathcal{A} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k} \Longrightarrow$ седл. т. в чист. стр. нет :(

$$\overline{\vartheta} = \max\left\{\underbrace{\mathcal{A} - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}}_{>0}, 0\right\} = \mathcal{A} - \underbrace{\frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}}_{>0} > \mathcal{A} - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} =$$

$$= \mathcal{A} - \mu_n B \Longrightarrow \overline{\vartheta} > \max\{\mathcal{A} - \mu_n B, 0\} = \underline{\vartheta} \Rightarrow \text{седл. т. в чист. стр. нет} \Longrightarrow \text{необх. искать реш-е в смеш. стр.}$$

в) Исследование реш-я игры в смеш. стр.

//Ф. $\overset{F(x,y)}{}$ выигрыша вып. по перем-й x и y, даже по совокуп-ти//

В соотв. с Т$_{1.1Н}$, $\vartheta = \overline{\vartheta}$; $\overset{\text{оптим. стр. д/защ}}{y^0}$: $y_i^0 = \dfrac{B}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$, $i=\overline{1,n}$

задача по

$$\overset{\text{оптим. смеш. стр. нап. мера}}{\varphi^0} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p_i^0}_{} I_{x^{(i)}}, \quad \overset{\text{в-р}}{p_i^0} = \frac{1}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \; i=\overline{1,n}$$

//С вер-тью p_i^0 нужно нанести $\overset{\text{то, что происходит при прорыве ср-в защ.}}{\boxed{\text{концентр. удар}}}$ по i-му пункту//

//т.е. там, где он наименее защищён; Т. нужно выбрать случайно//

Д-м, что $\underset{\text{усредн. выигрыш нап.}}{F(\varphi^0, y)} \overset{(*)}{\geqslant} \overline{\vartheta}, \; \forall y \in Y$ //какая бы $\overset{\text{стр.}}{\text{защ}}$ не была, нап. обеспечивает себе средний выигрыш//

Т a_i, $i=\overline{1,n}$, — $\forall$ числа, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \max\{a_i, 0\} \overset{\text{//}0}{\geqslant} \max\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i, 0\}$

▲ $$\underset{\text{ф-ла усреднения}}{F(\varphi^0, y) =} \overset{\text{//мат. ожидание выигрыша//}}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(\underset{\leftarrow \text{конц. удар}}{x^{(i)}}, y)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max\{A - \mu_i y_i, 0\} = \sum_{i=1}^{n} \max\{\underbrace{A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i}_{a_i}, 0\} \overset{\text{//утв. выше//}}{\geqslant}$$

$$\geqslant \max\{\sum_{i=1}^{n} (A p_i^0 - \mu_i p_i^0 y_i), 0\} = //\textstyle\sum p_i^0 = 1// = \max\{A - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\} = \max\{A - \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\} = \underset{\forall y \in Y}{\overline{\vartheta}}$$ ▨

г) Модель дуэли

в смеш. стр.

и-й x и y,

н. стр. д/защ

$$y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, i=\overline{1,n}$$

происходит при
ве ср-в защ.
-му пункту //
ать случайно //

кая бы $\overset{\text{стр.}}{\text{защ}}$ не была,
п. обеспечивает себе
дний выигрыш //

$$\overset{//0}{\max_i}\{a_i, 0\} \geq$$

$$p_i^0 \max_i \{ \mathcal{A} -$$

$$\{y_i, 0\} \geq \text{//утв. выше//}$$

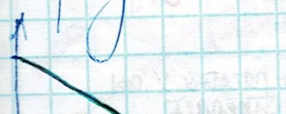
$p_i^0 = 1$ //

$$\frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\} = \overline{v} \quad \forall y \in Y$$ ■

Принимают участие 2 игрока (дуэлянты). В начале расстояние м/у ними $= d_0$ — первоначал. расст-е. Каждый игрок имеет в своем распоряжении по одному выстрелу. По команде они сближаются, выстрел могут произвести в ∀ момент времени. Обычно есть барьер — ближе некого расст-я подходить нельзя, — в нашем случае его нет (т.к. это несильное огранич-е общ-ти).

Как характеризуются игроки? Ф-циями меткости — $\underset{\nwarrow \text{д/ i-го игрока}}{p_i(d)}$, $i=\overline{1,2}$ — вер-ть того, что он поразит противника, стреляя с расст-я d.

Св-ва ф-ций меткости: непрерывные, определены на $[0, d_0]$, убывающие, причем $p_i(0) = 1$ (if игрок вплотную подошел и стреляет, то он попадает с вер-тью 1), $i=\overline{1,2}$, и



$p_i(d_0)=0,\ i=\overline{1,2}$ (в начале большое расст-е, они начинают сх-ся)

Можно сделать некое обобщение: $p_i(d_0)=a>0,\ i=\overline{1,2}$, — исследование модели не изм-ся

а) Модель шумной дуэли — когда игроки слышат выстрелы.

Стратегия 1го игрока — x — то расст-е, с к он намечает сделать выстрел; $x\in X=[0,d_0]$

Аналогично д/2-го — $y\in Y=[0,d_0]$

„Выигрыш" 1го игрока — вер-ть поражения 2го игрока, т.е. цель 1го — поразить противника (с большей вер-тью)

Ф-ция выигрыша 1го —

$$-F(x,y)=\begin{cases}\overbrace{p_1(x)}^{\text{вер-ть поражения противника}}, & x\geq y, \text{ // раньше выстрелил // Убыв. ф. //}\\ \underbrace{1-p_2(y)}_{\text{вер-ть того, что 2й промахнется}}, & x<y \text{ // позже —//— // Возр. ф-ция //}\end{cases}$$

здесь нет никаких множителей, т.к. модель шумная ⇒ 1ый меняет: вместо расст-я x, он подходит вплотную и стреляет

Т.е. 1ый игрок использует инф-цию о том, что он услышал выстрел

Ф-ци
сторон
напи
реш-е
сеоп. т

Ди
лен) к
ся за
поддн
щеон
ботан
Надо
проек
време

Как

больше рас-

ℓ)

обобщение:

ерование мо-

ии — когда

.

а — x — то рас-

елать выстрел;

$\in Y = [0, d_0]$

вер-ть пора-

ль $\underline{1-x}$ — пора-

ет вер-тью)

.

выстрели // убыв. ф. //

—//— // //возр. ф-ция //

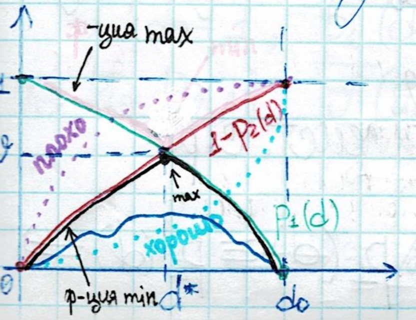
есто расст-я x, он
о и стреляет

инф-цию о том,

Ф-ция выигрыша опред-на на □ со стороной d_0; она разрывна вдоль диагонали □, но тем не менее, игра имеет реш-е в чист. стр. ⇒ у ф-ции выигр. есть седл. т.

Дуэл. ситуация м.б. и в эк-ке. Объявлен конкурс проектов — 2 фирмы борются за некий проект, ℓ нужно подать не позднее момента времени T. Чем раньше он будет подан, то он будет мало доработан ⇒ больше вер-ть, что его отвергнут. Надо понять: в какой момент подать проект? Это игра с выбором момента времени.

Как выглядит оптим. стр. шум. дуэли?



∢ отр-к $[0, d_0]$ и две ф-ции $=$ — возр. и убыв ⇒ ⇒ есть ! т. пересеч-а $\underline{\underline{d^*}}$:

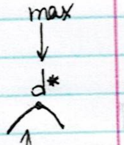
$p_1(d) = 1 - p_2(d)$ ← реш-е

(d^*, d^*) — оптим. стр. / седл. т.

$(d^*, d^*, \underset{\text{↖знач-е игры}}{\vartheta = p_1(d^*)})$ — реш-е игры

d^* — расст-е, с к. вер-ть попасть в противника = вер-ти того, что он промахнется. If ай плохо стреляет, то его ф-ция ⋰, т.е. вер-ть того, что он промахнется, велика. If ай хорошо стреляет, то его ф-ция ⋰

Покажем, что $(d^*, d^*, \vartheta = p_1(d^*))$ явл-ся реш-м игры. Посчитаем maxmin и minmax, покажем, что они =; найдем maxmin и minmax стратегии, к. образуют седловую т.

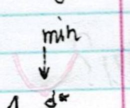


ф-ция min на пред. стр.

$$\underline{\vartheta} = \max_{0\le x\le d_0} \inf_{\underset{\text{↖фикс.}}{0\le y\le d_0}} F(x,y) = \max_{0\le x\le d_0} \min[p_1(x), 1-p_2(x)] =$$

$$= p_1(d^*) \quad \text{← maxmin стр.}$$

$$\overline{\vartheta} = \min_{0\le y\le d_0} \sup_{\underset{\text{↖фикс.}}{0\le x\le d_0}} F(x,y) = \min_{0\le y\le d_0} \max[p_1(y), 1-p_2(y)] =$$



ф-ция max на пред. стр.

$$= p_1(d^*) \quad \text{↖ minmax стр.}$$

$\underline{\vartheta} = \overline{\vartheta} \Rightarrow$ решили игру в чист. стр.

Частный случай: $p_1(d) \equiv p_2(d) \Rightarrow$

дл. т.
игры
пасть в
то он про-
ляет, то
что он про-
рошо стре-

$p_1(d^*))$ явл-ся
min и minmax,
maxmin и
т седловуют т.
$_1(x), 1-p_2(x)]=$

$[p_1(y), 1-p_2(y)]=$

. стр

$) \equiv p_2(d) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ расст-е, с d надо стрелять, вычисл-ся как $p_1(d) = 1 - p_1(d) \Longrightarrow d^*$ опред-ся из ур-я $p_1(d) = \frac{1}{2}$, т.е. вер-ть поражения противника $= 1/2$

15

задачи мб

б) Модель бесшумной дуэли //без подробностей//

игроки не слышат выстрелов друг друга

Седл. т. нет $\Rightarrow$ необх. решать в смеш. стр.

покажем это

$$F(x,y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y,\\ \underbrace{(1-p_2(y))}_{\text{2й промах-ся}}\,\underset{\text{1й попадает}}{p_1(x)}, & x < y \end{cases}$$

//2й выстрелил раньше//

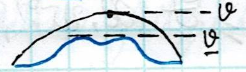
стреляет с расст. x, т.к. не знает, что 2й произвёл выстрел

$$\underline{\vartheta} = \max_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x,y) \overset{\text{Упр}}{=} \max_{0 \leq x \leq d_0} \left[p_1(x)(1-p_2(x))\right]$$

$$\overline{\vartheta} \overset{\text{Упр}}{=} p_1(d^*)$$

Показем, что $\underline{\vartheta} < \overline{\vartheta}$: На графике

$p_1(x)(1-p_2(x)) \longrightarrow$



мб задача

Пример (реш-я)

$\exists\ d_0 = 1,\ p_1(d) = p_2(d) = 1 - d,\ x \in X = [0,1],$
$y \in Y = [0,1];$

$$\underset{\text{разрывная}}{F(x,y)} = \begin{cases} 1 - x, & x > y,\\ y(1-x), & x < y \end{cases}$$

//Подробное исследование искать в зеленой книжке//

Ответ: $\vartheta = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$, $\varphi_0(x)$ ← ф-ция распр-я оптим. смеш. стр. д/1 и 2 игрока

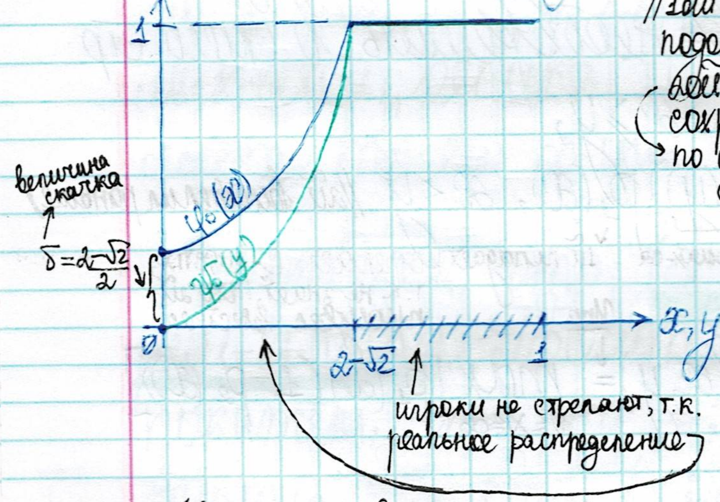
↖ шум. дуэль при $p_1(d) = p_2(d)$

ф-ция распр-я оптим. смеш. стр. д/1го игрока

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2}+1\right), & 0 \leq x \leq 2-\sqrt{2}, \\ 1, & 2-\sqrt{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

—//— д/2го

$$\psi_0(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{1}{(y-1)^2}-1\right), & 0 \leq y \leq 2-\sqrt{2}, \\ 1, & 2-\sqrt{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$



//1ый – у него вер-ть >0, чтобы подойти вплотную ко 2-му
2ой – более осторожный, хочет сохранить свою жизнь //
по идее выстрелит раньше

Упр Проверить вып-ние нер-ва (*):

$$F(\varphi^0, y) \geq \vartheta = \sqrt{2}-1 \geq F(x, \psi^0),\ \forall x \in X,\ \forall y \in Y$$

проверка, убедимся, что это реш-е в смеш. стр.

Антаг.

§8. Многошаговые игры с полной информацией

//Игроки в ходе игры получают инф-цию о том, какие ходы делает противник.//

∃ игра повторяется T шагов, т.е. номер каждого шага — $t = \overline{1, T}$. На каждом шаге 1ый игрок выбирает x_t — контролируемый фактор; у 2го — y_t. Знач-я контрол-х фактов называют альтернативами.

//Процесс игры//

Шаг 1. 1ый — $x_1 \in U_1$, 2ой — знает x_1 — $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$. зависит от

· · · //игра продолж-ся// $x_1, \dots, x_{t-1}$; $y_1, \dots, y_{t-1}$

Обозн. $\bar{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$ — все ходы, к сделал 1ый с 1 до t шага;

$\bar{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$ — — // — 2ой — // —

Шаг t. 1ый — x_t, ему известны $(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$. предыстория пред. шагов

$x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$

2ой — y_t, ему известны $(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$,

$y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$

После T шагов возникает пара $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ — запись всех ходов всех игроков на всех шагах — партия игры

Д/ ∀ партии определен выигрыш 1го — $F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$

Задача: дать описание игры в норм. форме //надо определить стратегии — выбир-ся до игры, независ. друг от друга//

мб зад

Пример $\exists$ на столе n спичек. Игроки по очереди берут 1 или 2 спички. Кто последний взял спичку — проигрывает.

$\exists$ $n=1 \Rightarrow$ 1й проиграл
$\exists$ $n=2 \Rightarrow$ 1й берет одну $\Rightarrow$ выигрыш
$\exists$ $n=3 \Rightarrow$ 1й берет две $\Rightarrow$ выигрыш
$\exists$ $n=4 \Rightarrow$ 1й проиграл
$\exists$ $n=5,6 \Rightarrow$ 1й выиграл (1, 2 спички, соотв)
$\exists$ $n=7 \Rightarrow$ 1й проиграл

Т.е. 1й проигрывает, if $n=3k+1$;
1й выигрывает, if $n \neq 3k+1$

Какова стр. выигрыша 1го?

$\exists$ $n=23=3\cdot 7+2 \Rightarrow$ выигрыш, потому что в начале надо взять 1 спичку

мб задача

Упр Решить игру: есть числа $\{1,\dots,9\}$. 1й игрок записывает число (одно из набора $\{\dots\}$), напр., 5; 2й игрок суммирует с 5 одно из чисел набора $\{\dots\}$ и т.д. Кто 1ый достигнет 100 — проиграл. Как надо действовать игрокам? Описать оптим. стр. д/, напр., 1го игрока.

Страт
контро
пающей
ника)
Стра
Выбор
на шаге
некой
но загол
уже при
была, в
стр. на
некой
$\hat{x}_t \in U_t$
Ане
$\tilde{y}_t \in \tilde{V}_t$
Опре
$\hat{x} = (\hat{x}_t$
рает на
соотв.
выбрат

с. Игроки
ски. Кто
игрывает.

выигрыш
выигрыш

спички, соотв

$3k+1$;
$3k+1$
?

ш, потому
шеку
$\{1, ..., 9\}$.
набора $\{...\}$),
дно из чисел
ает 100—
игрокам?
игрока.

Стратегия (неформально) — это выбор контрол. факторов в завис-ти от поступающей инф-ции (от поведения противника)

Стратегия (формально): $\overset{\text{произвол.}}{\forall}$ шаг t. Выбор альтернативы x_t 1м игроком на шаге t м.б. осуществлен в соотв. с некой ф-цией $x_t = \tilde{x}_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$, к можно заготовить до игры и во время игры уже применять, подставив историю, к была, в эту ф-цию, и выбрать x_t. Т.е. стр. на шаге t состоит в исп-нии некой ф-ции. Будем считать, что $\tilde{x}_t \in \tilde{U}_t$

Аналогично д/2го: $y_t = \tilde{y}_t(x_t, \overline{y}_{t-1})$, $\tilde{y}_t \in \tilde{V}_t$

Определим понятие стр. 1го игрока: $\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t=\overline{1,T}) \in \tilde{X} = \underset{\text{прямое произведение}}{\times \prod_{t=1}^{T}} \tilde{U}_t$, т.е. он выбирает набор ф-ций, в соотв. с к он действует во время игры (выбирать ф-ции можно до игры)

Нюанс на 1м шаге — 1й игрок ничего не знает $\Rightarrow \tilde{x}_1 = x_1$

Аналогично стр. 2го игрока:

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t,\ t=\overline{1,T}) \in \tilde{Y} = \times\prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t$$

// Наборы ф-ций у игроков выбир-ся независ. друг от друга //

П $(\tilde{x}, \tilde{y})$ выбрана, то ей соотв. однозначно партия игры: $(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\overline{x}_T, \overline{y}_T)$.

На 1м шаге: $\tilde{x}_1 = \underline{\underline{x_1}}$, $\underline{\underline{y_1}} = \tilde{y}_1(x_1)$;

На 2м шаге: $\underline{\underline{x_2}} = \tilde{x}_2(x_1, y_1)$ и т.д.

такой подстановкой получам все знач-я контр. факторов всех игроков $\Rightarrow$ получим партию игры

По опр., $F(\tilde{x}, \tilde{y}) \overset{def}{=} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$

Значит, тем самым, была определена многошаг. (антаг.) игра с полной инф-цией: $\Gamma' = < \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) >$

16

$\measuredangle$ частные случаи Γ'', где мн-ва $U_t(\cdot)$, $V_t(\cdot)$ конечны, и Γ'', где $U_t(\cdot) \equiv U_t$, т.е. не зависит от предыстории, где U_t – компакт метрич. пр-ва, $V_t(\cdot) \equiv V_t$, —//—, где V_t – компакт метрич. пр-ва, причем $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ – непр. на произведегрок ничего

рока:

вис. друг от

соотв. одно-

→ $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$.

);

).

пределена

нной инф-

16

н-ва

ре

предысто-

непр-ва,

акт метрич.

а произведе-

-нии компактов, т.е. определена и непр. на мн-ве $(\times\prod_{t=1}^{T} U_t)\times(\times\prod_{t=1}^{T} V_t)$

Покажем, что Г' и Г'' имеют реш-я в чист. стр., а мы определим. Выпишем стр., а потом док-м оптим-ть, и выпишем выраж-е д/ знач-я игры.

Определим след. стр.:

$\hat{x}^0 = (\hat{x}^0_t, t=\overline{1,T})$, $\hat{y}^0 = (\hat{y}^0_t, t=\overline{1,T})$ — наборы ф-ций. Опр-ние наборов будет дано м-дом динамич. программирования (опр-ние оптим. стр. происходит от конца к началу), в ходе опр-я будут возникать ф-ции Беллмана.

Начнем с самой послед-й ф-ции $\hat{y}^0_T$, а соотв. самому последнему выбору 2го. Обозн. $y^0_T = \hat{y}^0_T(\overbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}}^{\text{фикс. предыстория}})$ — знач-е ф-ции в завис-ти от предыстории; y^0_T: $\overset{\text{ф-ция опред-на при } \forall \text{ знач-х арг.}}{\mathcal{F}(\underbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}}, y^0_T)} = \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} \mathcal{F}(\underbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}}, y_T) \textcircled{=}$ — на самом последнем шаге 2й игрок, всё зная, минимизирует ф-цию выигрыша; $\textcircled{=}\ \mathcal{F}(\underbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}})$ — ф-ция Беллмана.

$\tilde{x}_T^0 : x_T^0 = \tilde{x}_T^0(\underbrace{\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}}_{\text{д/}\forall\text{ знач-я арг. необх. опред-ть знач-е ф-ции}}) : F(\underbrace{\bar{x}_{T-1}}, x_T^0, \underbrace{\bar{y}_{T-1}}) =$ ← используем ф-цию Белл.

$= \max\limits_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\underbrace{\bar{x}_{T-1}}, x_T, \underbrace{\bar{y}_{T-1}}) = F(\underbrace{\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}})$ 1й, зная предысторию, макс-т ф-цию, т.е. это maxmin стр. его

] уже опред-ны ф-ции $\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \dots, \tilde{y}_{t+1}^0, \tilde{x}_{t+1}^0$; появилась ф-ция Белл. к шагу t $F(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$. Необх. опр-ть $\tilde{x}_t^0, \tilde{y}_t^0$, а опред-ся как 1ые 2 ф-ции, только $t \underset{\text{замена}}{\longleftrightarrow} T$

Итак, считаем, что все ф-ции опр-ны вплоть до момента шага 1.

$\tilde{x}_1^0 : F(\tilde{x}_1^0) = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1)$ ← if дойдем до самого начала

Опр-я корр-тны д/ игр Γ' и Γ'', в том смысле, что все max и min дости-ся (иначе стр. была бы не определена): д/ Γ', потому что мн-ва конечны; д/ Γ'', потому что д/ 1й ф-ции $V_t(\cdot)$ — компакт, ф-ция непр., min дост-ся, по оставш. перем-м ф-ция непр. и т.д.

знач-е игры → $\tilde{v} = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1) \overset{\text{опр-е ф-ции Белл.}}{=} \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V_1(\underset{x_1}{\cdot})} F(x_1, y_1) \overset{\text{опр-е ф-ции Белл.}}{=} \dots =$

$= \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V}$

$\nabla 1_{16}$ (

с полной

реш-е в

вида ($\tilde{x}^0$

оп

▲ 1) $F(\tilde{x}^0,$

2) $F(\tilde{x}^0$

//Док-м 1)

1) $\forall y \in Y$

$\geq \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F($

def ф-ции Белл.

$\textcircled{=} F(\tilde{x}^0,$

$\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1})$

$\geq F(\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1)$

как

нача

$= \tilde{v}$ ▨

Прим

1. Max

$_{1}, \overset{\circ}{x}_T, \bar{y}_{T-1}) =$

зуем ф-цию Белл.

1й, зная предысторию, макс-т ф-цию, т.е. это maxmin стр. его

$_{T-1})$

$\tilde{y}^0_T, \tilde{x}^0_T, \dots,$

Белл. к шагу t

$\tilde{y}^0_t$, α опред-ся

$\longleftrightarrow \Gamma'$

замена

нции опр-ны

дем до самого начала

и Γ'', в

min дости-

ределена):

ены;

$_1(\cdot)$ —

остиг-ся,

и т.д.

$_1) = \dots =$

$$= \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \dots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} \mathcal{F}(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$$

Т 16 (Цермело) Всякая многошаг. игра с полной инф-цией Γ' (или Γ'') имеет реш-е в чист. стр., причем решение вида $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0, \tilde{v})$

оптим. стр. опред-ны

→ последовательный maxmin

▲ 1) $\mathcal{F}(\tilde{x}^0, \tilde{y}) \geq \tilde{v}, \ \forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$

2) $\mathcal{F}(\tilde{x}, \tilde{y}^0) \leq \tilde{v}, \ \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

} необх. д-ть

→ 1й игрок гарантирует получение v при ∀ поведении 2го

→ аналогично

//Док-м 1), 2) аналогично//

1) $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$ $\mathcal{F}(\tilde{x}^0, \tilde{y}) = \mathcal{F}(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}, \tilde{y}_T) \underset{=}{\geq} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} \mathcal{F}(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}, y_T) =$ // все стр. зафикс., по ним однозначно (подстановкой одной ф-цией в другую) получ-ся знач-е контрол. факторов //

$$\overset{\text{def ф-ции Белл.}}{=} \mathcal{F}(\tilde{x}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \overset{\text{def } \tilde{x}^0_T}{=} \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \mathcal{F}(\tilde{x}^0_1, \dots, \tilde{x}^0_{T-1}, x_T, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \overset{\text{def ф-ции Белл.}}{=} \mathcal{F}(\tilde{x}^0_1, \dots, \tilde{x}^0_{T-1}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \underset{\text{аналогично}}{\geq \dots \geq}$$

$$\geq \mathcal{F}(\tilde{x}^0_1, \tilde{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \mathcal{F}(\tilde{x}^0_1, y_1) \underset{\text{def ф-ции Белл.}}{=} \mathcal{F}(x^0_1) = \max_{x_1 \in U_1} \mathcal{F}(x_1) = \tilde{v}$$ ■

как в начале

Примеры

1. Шахматы

Есть такое большое T, что больше T игра не может повторяться ⟹ все партии повторяются за фикс. число ходов

большое

1ый игрок — белые
2ой игрок — чёрные

мн-во возможных ходов в сложившейся позиции

пред. ходы

белые

Делается ход $x_t \in U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$;

чёрные → y_t — аналогично.

Партия закончена ⇒ [ничья,
выигрыш белых,
выигрыш чёрных

Ф-ция выигрыша — $F(\overline{x}_T, \overline{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{white won}, \\ 0, & \text{black won}, \\ 1/2, & \text{ничья}. \end{cases}$

Шахматы — игра вида Г'.

Справедлива Т Цермело.

//Что-то про шахматное программирование...//

!К/р (5)

2. $$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

мн-во столбцов

мн-во строк

∢ аналогов. игру. Введем разбиение:

мн-во строк ⟶ $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$ ⇒

номера строк

⇒ M_α, $\alpha = \overline{1,2}$;

мн-во столбцов ⟶ $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$ ⇒

⇒ N_β, $\beta = \overline{1,2}$

Вернем

1) 1ый вы

зная α

2) 1ый вы

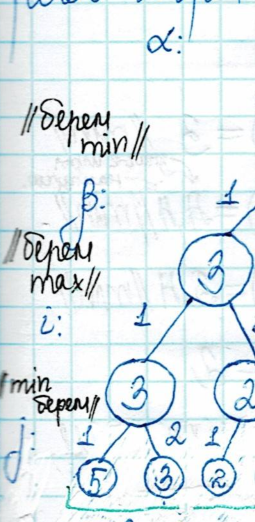
зная α и

$j \in N_\beta$, зна

//Выпишем

Графи

рево игры



$F(\alpha,$

Ф-ции

возможных ходов в сложившейся
ед. ходы позиции

$\overline{\ }_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$;

гично.

чья,

игрыш белых,

игрыш чёрных

$= \begin{cases} 1, \text{ white won}, \\ 0, \text{ black won}, \\ 1/2, \text{ ничья}. \end{cases}$

мирование...//

збиение:

$\,_2 = \{3, 4\} \Rightarrow$

ера строк

$N_2 = \{3, 4\} \Rightarrow$

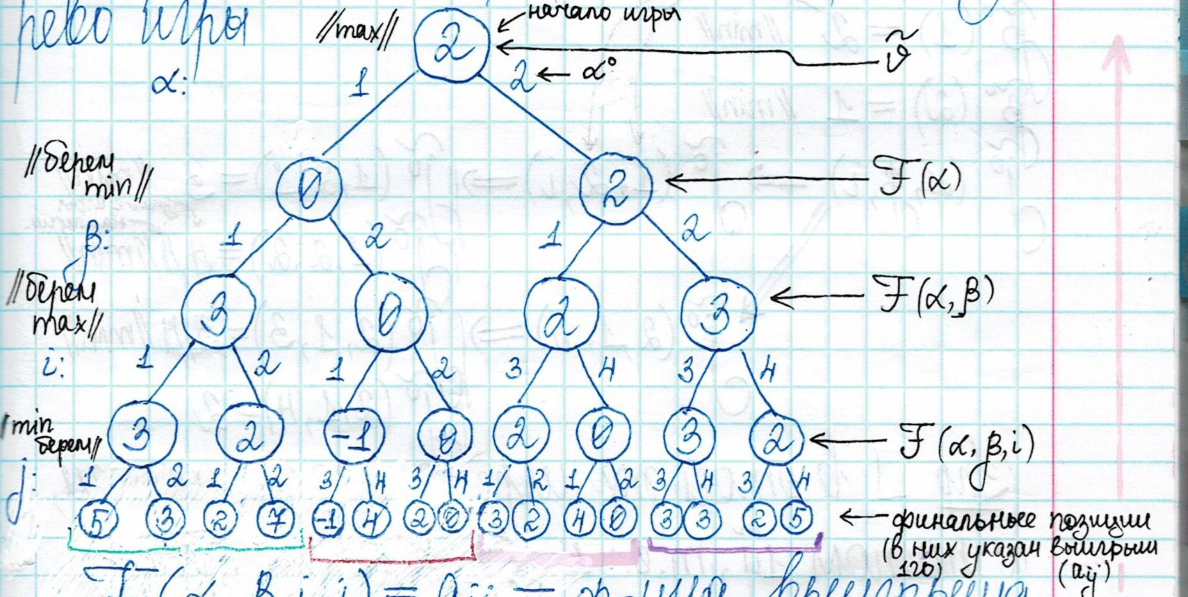
Вернемся к игре:

1) 1ый выбирает α; 2ой выбирает β, зная α

2) 1ый выбирает номер строки $i \in M_\alpha$, зная α и β; 2ой выбирает номер столбца $j \in N_\beta$, зная α, β, i.

// Выпишем реш-е игры, оптим. стр. 2х игроков //

Графич. интерпретация игры: ∢ дерево игры



$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ — ф-ция выигрыша 1го

Ф-ции Беллмана: $F(\alpha, \beta, i) = \min\limits_{j \in N_\beta} F(\alpha, \beta, i, j)$,

$F(\alpha, \beta) = \max\limits_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$,

$$\mathcal{F}(\alpha) = \min_{\beta=1,2} \mathcal{F}(\alpha,\beta),$$

$$\tilde{v} = \max_{\alpha=1,2} \mathcal{F}(\alpha) = 2 = \mathcal{F}(\alpha^0)$$

Оптим. стр. 1го: $(\alpha^0, \tilde{i}^0(\alpha,\beta))$ число ф-ция

2го: $(\tilde{\beta}^0(\alpha), \tilde{j}^0(\alpha,\beta,i))$

1й $\begin{cases} \alpha^0 = 2 \\ \tilde{i}^0(\alpha,\beta) \longrightarrow \tilde{i}^0(2,\beta) \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{i}^0(2,1) = 3 \\ \tilde{i}^0(2,2) = 3, 4 \end{cases} \end{cases}$

наилучш. оптимал. (знач. игры)

$\tilde{\beta}^0(1) = 2$ //min//

$\tilde{\beta}^0(2) = 1$ //min//

$\tilde{j}^0(\alpha,\beta,i) \Longrightarrow \tilde{j}^0(1,2,i) \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{j}^0(1,2,1) = 3 & \text{//min//} \\ \tilde{j}^0(1,2,2) = 3, 4 & \text{//min//} \end{cases}$

знач-е игры наилучш.

$\tilde{j}^0(\alpha,\beta,i) \Longrightarrow \tilde{j}^0(2,1,i) \Longrightarrow \begin{cases} \tilde{j}^0(2,1,3) = 2 & \text{//min//} \\ \tilde{j}^0(2,1,4) = 2 \end{cases}$

__Упр__ $\exists$ в этой же игре сначала ходит 2й, а потом 1й, т.е.: 1) β, α

2) $j \in N_\beta$, $i \in M_\alpha$

//знает//

//знает//

экзамен!

__Упр__ $\exists$ $\mathcal{F}(x,y) = (x-y)^2$, $X = [0,1]$, $Y = [0,1]$.

∢ одношаг. игру с полной инф-цией:

Глава 2. Неантагонистические игры ← 05/10

§9. Ситуации равновесия в играх многих лиц

// Игры лиц, интересы $\not\!$ не противоположны //

∀ общую игру двух лиц: $x \in X$ — мн-во всех стр. 1го — стр. 1го, $y \in Y$ — мн-во всех стр. 2го — стр. 2го; (x, y) — ситуация, $(x, y) \in \underbrace{X \times Y}_{\text{мн-во всех ситуаций}}$; ф-ция выигрыша 1го — $F(x, y)$, ↗ хочет бо́льший выигрыш; ф-ция выигрыша 2го — $G(x, y)$ ↗ —//— // т.е. игроки максимизируют выигрыши //

Общая игра двух лиц в норм. форме — ↘ выбирают стр. независ. друг от друга — $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y), G(x, y) \rangle$

If $G(x, y) \equiv -F(x, y) \Rightarrow$ игра антаг.

$\underset{\text{антаг.}}{\text{Седл. т.}} \longleftrightarrow \underset{\text{неантаг.}}{\text{ситуация равновесия}}$ — некое уст. полож-е в игре

<u>Опр</u> Ситуация (x^0, y^0) наз-ся ситуацией равновесия (или равновесием по Нэшу), if вып-ся $F(x, y^0) \leqslant F(x^0, y^0)$, $\forall x \in X$, // отклоняться от x^0 к x — невыгодно (выигрыш не увелич-ся) //

$G(x^0, y) \leqslant G(x^0, y^0)$, $\forall y \in Y$. // —//— //

<u>Упр</u> If $G \equiv -F$, то ситуация равновесия есть седл. т. ф-ции F // подставить, поменять знак $\Rightarrow$ опр-е //

Recap

В антаг. игре (x^0, y^0) — седл. т., ее компоненты (по T1.1) — maxmin и minmax стр., т.е. концепция равновесия и концепция получ-я наилучш. гарант. рез-та — совпадают.

If в антаг. игре есть 2 седл. т., то знач-я в них есть знач-е игры, ⇒ будут одинаковые

Такими (выше) св-вами не обладает общ. игра двух лиц.

Опр Общая игра Г наз-ся биматричной, if мн-во стр-й игроков конечно, т.е. $X = \{\overline{1,m}\}$, $Y = \{\overline{1,n}\}$ — мн-ва номеров стр-й игроков

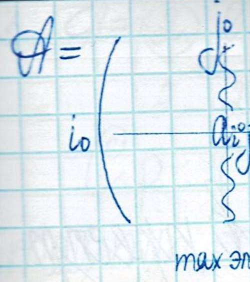
Удобно писать вместо x — $i \in X$,
вместо y — $j \in Y$, тогда

выигрыши — $\overset{1го}{F}(i,j) = a_{ij}$, $\overset{2го}{G}(i,j) = b_{ij}$ ⇒ возникают м-цы $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$

// Т.е. в биматр. игре 1ый выбирает номер строки, 2ой — номер столбца, причем одновременно в 2ух м-цах ⇒ выигрыш 1го — в м-це A, 2го — в м-це B //

Пара (i^0, j^0) биматр. игры — ситуация р., if $a_{ij^0} \le a_{i^0j^0}$, $\forall i = \overline{1,m}$; $b_{i^0j} \le b_{i^0j^0}$, $\forall j = \overline{1,n}$

Геометр. интерпретация:



Прим

1. Игра (

$A = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & \textcircled{1} & 0 \\ Т & 0 & \textcircled{2} \end{array}$
жена

или в те

○ — 2 си

невыгодн

○ — еще

Тогда: (

(Ф,Ф) и

чают раз

— куда по

Подход

ней надо

Игры

наз-ся б

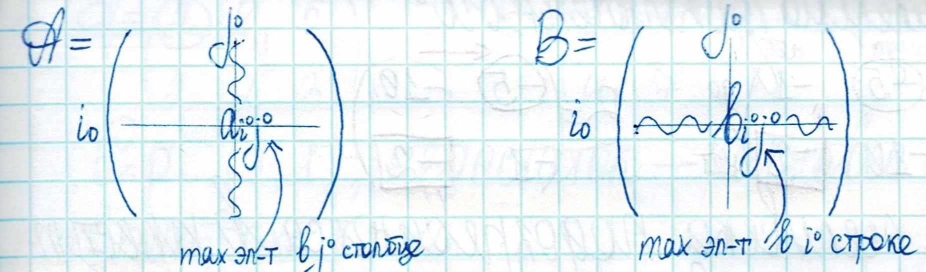
обладают.
едл. т., то
ры, ℓ будет

не обладает

биматричной,
чно, т.е.
в стр-й игроков

— $i \in X$,
— $j \in Y$, тогда
b_{ij} ⇒ возни-
$ij)_{m \times n}$
нает номер
, причем
ыигрыш 1го-

ситуация р.,
$=\overline{1,n}$



Примеры //демонстрируют недостатки равновесия//

1. Игра „Семейный спор“

жена ↗ $A = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & \textcircled{1} & 0 \\ Т & 0 & \textcircled{2} \end{array}$ муж ↗ $B = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & \textcircled{2} & 0 \\ Т & 0 & \textcircled{1} \end{array}$ //Муж и жена спорят куда идти? На футбол или в театр? Эл-ты в м-це — кол-во удовольствия//

○ — 2 ситуации равновесия (отклоняться невыгодно)

○ — еще 2 ситуации равновесия

Тогда: (1,1) и (2,2) — ситуации равновесия ((Ф,Ф) и (Т,Т)) ⇒ в разных с.р. игроки получают разные выигрыши ⇒ семейный спор — куда идти?

//Недостаток//

Подход: д/того, чтобы реализовать с.р., о ней надо договориться.

Игры с таким сценарием поведения наз-ся бескоалиционными

Сознаться?

2. „Дилемма заключенного“

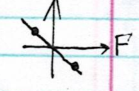
$$A = \begin{array}{cc|l} \text{да} & \text{нет} & \\ -5 & -1 & \text{да} \\ -10 & \boxed{-2} & \text{нет} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$$

Два человека подозреваются в преступлении, следователь предлагает им сознаться, ведь преступление тянет на 2 года тюрьмы.

If оба сознаются, то оба получат по 5 лет.
If 1ый сознается, а 2ой — нет, то 1ый получает 1 год, 2ой — 10 лет (аналогично наоборот)
If оба не сознаются, то оба получат по 2 года.

С.р.: (1,1); но есть недостаток: есть ситуация, в 2 они получают меньший срок, — (2,2)

Опр Сит. (x^*, y^*) наз-ся опт-й по Парето, if $\neg\exists\ (x,y)$: $F(x,y) \geq F(x^*,y^*)$,
$G(x,y) \geq G(x^*,y^*)$, причем хотя бы одно из этих нер-в строгое.



Упр If $G \equiv -F$, то $\forall$ сит. явл-ся оптим. по Парето

---

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

С.р.: (

maxmin, т

$W_1(1) = \min_{j=1,3}$

$W_1(2) = \min_{j=1}$

Аналогич

отклони

другому.

$\forall$ игр

ков $I = \{1,$

$x_k \in X_k \Rightarrow$ (мн-во с)

— ситуаци

ф-ция выи

мизироват

$\Rightarrow$ Игра
в норм.

$\exists$ есть

$x\|y_k = (x_1,$

Опр Си

в преступ-
ет им соз-
нет на 2 года

чат по 5 лет.
1ый получает
наоборот)
лучат по 2 года.
к: есть ситу-
ший срок, —

т-й по Парето,
),
, причем
ногое.

оптим. по Парето

3. $A=\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 0\downarrow & 5\uparrow \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} \textcircled{2} & 2 \leftarrow & 1 \\ 0 \rightarrow & 7 \rightarrow & 8 \end{pmatrix}$ $\left\{\begin{matrix}\rightarrow \\ \rightarrow\end{matrix}\right.$ кому выгодно отклониться

С.р.: (1, 1); недостаток — равновес. стр. не maxmin, т.к.

$W_1(1)=\min\limits_{j=\overline{1,3}} a_{1j}=0$

$W_1(2)=\min\limits_{j=\overline{1,3}} a_{2j}=2$ — maxmin

Аналогично д/2го. Т.е. кто-то может отклониться д/того, чтобы навредить другому. //В антаг. играх такое невозможно//

18

28

∢ игры многих лиц. ∃ мн-во игроков $I=\{1,\dots,S\}$, $S\geqslant 2$. ∃ kй выбирает стр. $x_k\in \overset{\text{— мн-во стр. kго}}{X_k}$ ⟹ возникает набор стр. $x=(x_1,\dots,x_S)$ — ситуация, $x\in \overset{\text{— мн-во всех ситуаций}}{X}=\times\prod\limits_{k=1}^{S} X_k$; на X у kго есть ф-ция выигрыша $F_k(x)$, его цель — максимизировать выигрыш.

⟹ Игра многих лиц — $\Gamma=\langle X_k, F_k(x), k\in I\rangle$ в норм. форме

∃ есть сит. x, у kго стр. $y_k\in X_k$, то $x\|y_k=(x_1,\dots,x_{k-1},y_k,x_{k+1},\dots,x_S)$

<u>Опр</u> Сит. $x^0\in X$ наз-ся с.р. (р. по Нэшу),

if вып-ся $\max\limits_{x_k \in X_k} \mathcal{F}_k(x^0 \| x_k) = \mathcal{F}_k(x^0)$, $k=\overline{1,S}$.

//кому не выгодно отклон-ся от x^0, т.к. на ней реализ-ся max//

Зафикс. x_l, $l \neq k$, — стр. всех игроков кроме k-го. Мн-во $\underline{X_k(x_l, l\neq k)} = \operatorname{Arg}\max\limits_{x_k \in X_k} \mathcal{F}_k(x)$

(эквивалент.) **Опр** x^0 — с.р., if $\underline{x_k^0 \in X_k}(x_l^0, l\neq k)$, $\forall k=\overline{1,S}$.

//т.е. x_k^0 — наилучш. ответ на нулев. стр. остальных//

Т2.1.] X_k — вып. компакты евклид. пр-в разных размер-тей.] $\mathcal{F}_k(x)$ непр. на $X = \bigotimes\limits_{k=1}^{S} X_k$.] каждая $\mathcal{F}_k \frown_{x_k}$ $\forall x_l$, $l \neq k$. Тогда в игре многих лиц Γ $\exists$ с.р.

//Т1.3// ▲ 1)] $\mathcal{F}_k(x)$ строго $\frown_{x_k}$ //частный случай// $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \underbrace{\overset{\text{фикс.} \forall \text{ стр. остал. игроков}}{X_k(x_l, l\neq k)} = \{\overset{\in X_k}{f_k(x_l, l\neq k)}\}}_{\text{мн-во наилучш. ответов на } \forall \text{ стр. остальных игроков}}$ — ! эл-т мн-ва, т.к. max стр. вогнут. ф-ции достиг-ся в ! т.;

$f_k(x_l, l\neq k)$ определен однозначно $\Longrightarrow$ ф-ция наилучш. ответа k-го.

//Отображ.// $x \xrightarrow{\text{сопоставил}} \overset{\text{в-р}}{f(x)} = (f_k(x_l, l\neq k), k=\overline{1,S})$, т.е. каждый игрок выбирает свой наилучш. ответ.

Отобр. явл-ся непр, т.к. каждая ф-ция f_k непр. (по Т1.2) $\Longrightarrow$

$f: X \longrightarrow X \rightarrow$

вып. компакт

непр.

Т Брау

-непр. ото

пр-ва. Т

Тогда,

$f_k(x_l^0, l\neq k$

$\Rightarrow x_k^0$ — наи

игроков, т.

$\Rightarrow x^0$ — сед

//Док-во 1і

ф-ции наилу

искать реш

2)] $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}_k^\varepsilon(x) =$

1й части

$\mathcal{F}_k^\varepsilon$. ∢ посл

посл-ть x^ε

сит-ции

$x^0)$, $k=\overline{1,S}$.

x^0, т.к. на

игроков

$\mathrm{Arg}\max_{x_k\in X_k} F_k(x)$

$\neq k)$, $\forall k=\overline{1,S}$.

стальных//

вклид.пр-в

р. на $X=$

$/x_l$, $l\neq k$.

$\exists$ с.р.

случай// $\Longrightarrow$

-т мн-ва, т.к.

в!т.;

о $\Longrightarrow$ ф-ция

е. каждый

твет.

я ф-ция f_k

$f: X \longrightarrow X \rightarrow$ вып. компакт.

$\downarrow$ непр. $\hookrightarrow$ вып. компакт

Т Брауэра (о неподвижной т.). $\exists$ $f: X\to X$ — непр. отображ-е, где X — вып. компакт евклид. пр-ва. Тогда $\exists$ $x^0\in X$: $f(x^0)=x^0$ //Док-во в зелен. книге//

Тогда, по Т Брауэра, $f(x^0)=x^0$, т.е.

$f_k(x_l^0, l\neq k)=x_k^0$, $k=\overline{1,S}$, — неподвиж. т. $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ x_k^0 — наилучш. ответ на нулев. стр. остальных игроков, т.к. f_k — ф-ция наилучш. ответа $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ x^0 — седл. т.

//Док-во 1й части конструктивно: if построены ф-ции наилучш. ответов, то д/нахожд-я с.р. необх. искать реш-е нелин. с-мы //

2) $\exists$ $F_k \frown_{x_k}$ (не обязат. строго). $\exists$ $\varepsilon>0$. //Т 1.3//

$$\measuredangle\ F_k^{\varepsilon}(x)= \underbrace{F_k(x)-\varepsilon\underbrace{|\overset{\text{в-р в евклид. пр-ве}}{x_k}|^2}_{\text{квадрат евклид. нормы}}}_{\text{строго вогнут. ф-я}}$$ — строго $\frown_{x_k}$ $\Longrightarrow$ по

1й части док-ва $\exists$ x^{ε} — с.р. в игре с ф-ми F_k^{ε}. $\measuredangle$ посл-ть $\overset{\text{положит. чисел, стремящ-ся к 0}}{\varepsilon_h\longrightarrow 0+}$, $h=1,2,\dots$; $\Longrightarrow$ возникает посл-ть x^{ε_h} соотв-щих сит-ций р., т.к. все сит-ции $x^{\varepsilon_h}\in \overset{\text{компакт вып.}}{X}$, то из этой посл-ти можно всегда выделить сх-ся п/посл-ть. Без потери общ-ти, $x^{\varepsilon_h} \to x^0 \in X$

$F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h} \| x_k) \leq F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}), \forall x_k \in X_k, k=\overline{1,S}$ — — опр-е с.р.

Зафикс. k, x_k и перейдем к пределу при $h \to \infty$: $F_k(x^0 \| x_k) \leq F_k(x^0), \forall x_k \in X_k, k=\overline{1,S}$ — рез-т предел-го перехода

//Неконструктивный переход// ■

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$. Будем искать с.р. через мн-во наилучш. ответов.

— мн-во наилучш. ответов 1го

$\forall y \in Y \quad X(y) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} F(x,y)$

—//—2го

$\forall x \in X \quad Y(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} G(x,y)$

(x^0, y^0) — с.р. должна удовл. с-ме включений $\{x^0 \in X(y^0),\ y^0 \in Y(x^0)\}$

Частный случай: if мн-во наилучш. ответов состоит из одного эл-та, то есть $X(y) = \{x(y)\}$; $Y(x) = \{y(x)\}$, то е предположения Т1.2 вып-ны, то ф-ции явл-ся непр. Тогда с.р. (x^0, y^0) ищ-ся как реш-е след.

с-мы

При

1. Нах

$A = ($ Н

Н

2

−1

//Найде

$X(1) =$

$X(2) =$

//Анал

$Y(1) =$

//$Y(2)$

С.р.

$(i^0, j^0) = ($

2. С.р

]

эл-ть. Без
X

$X_k, k=\overline{1,S}$, —

к пределу
(x^0), $\forall x_k \in X_k$,
ода

19

удем искать
тветов.

включений

наилучш.
сть
$^{\exists}$предполож
вл-ся непр.
реш-е след.

с-мы $\begin{cases} x(y^0)=x^0, \\ y(x^0)=y^0 \end{cases}$

6,7

Примеры

1. Нахождение $^{\text{все}}$с.р. в биматричной игре

$$A=\begin{pmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{3} & 5 & -1 \\ \textcircled{4} & -2 & 3 & \textcircled{4} \\ 2 & 1 & 5 & \textcircled{4} \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \boxed{7} & 5 & 4 & \boxed{7} \\ 4 & \boxed{5} & \boxed{5} & 4 \\ -3 & 6 & 6 & 2 \\ \boxed{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

! К/р (6)

// Найдем мн-ва наилучш. ответов //

$\underline{X(1)}=\{1,2\}$

$\underline{X(2)}=\{\textcircled{1}\}$

// $X(4)$ //

// $X(j)=\underset{1\le i\le n}{\mathrm{Arg\,max}}\, a_{ij}$ // → т.е. max по столбцах

↑ 4 (у нас)

// Аналогично д/2го: $Y(i)=\underset{1\le j\le n}{\mathrm{Arg\,max}}\, b_{ij}$ // → т.е. max по строкам

↑ 4 (у нас)

$\underline{Y(1)}=\{\boxed{1},\boxed{4}\}$

// $Y(2)$ //   // $Y(4)$ //

С.р. $(i^0,j^0): i^0\in X(j^0),\ j^0\in Y(i^0)$ // т.е. найти эл-ты, где ○ совпадают с □ //

$(i^0,j^0)=(3,3),\ (1,1)$

2. С.р. на ▭ или □

$\exists\ F(x,y)=-3x^2+2y^2+7xy,\ X=[0,1];$

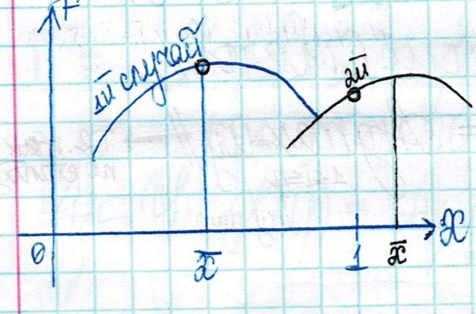
! К/р (7)

$G(x,y) = 4xy - y^2 - y$, $Y = [0,1]$.

Проверим, есть ли в игре с.р.:

F должна быть $\frown_x$, т.е. $F''_{xx} = -6 < 0$, т.е. выполнено (даже строго вогнута); также $G''_{yy} = -2 < 0 \Rightarrow$ стр. вогн. по y. $\Rightarrow$ с.р. есть!

Необх. построить ф-цию лучших ответов $x(y)$ и $y(x)$ и решить с-му, к была выписана.



//Должны фикс. y и макс-ть по x//

Т.к. $F \frown_x$, то применяем 1й м-д (произв. по $x = 0$)

$F'_x = 0 \Leftrightarrow -6x + 7y = 0 \Leftrightarrow$

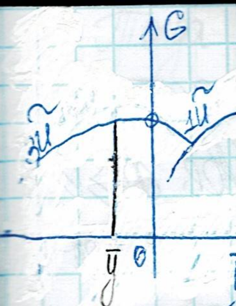
$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7y}{6}$, y фикс., — т. max

В 1м случае max на отр-ке достиг-ся в $\bar{x}$, а во 2м — в т. 1

$$x(y) = \begin{cases} \bar{x} = \frac{7y}{6}, & 0 \leq y \leq \frac{6}{7}, \\ 1, & \frac{6}{7} < y \leq 1 \end{cases}$$

Аналогично д/ 2го.

// Фикс. x, max-м по y //



$0 \leq \bar{y} = 4x$

If $x >$

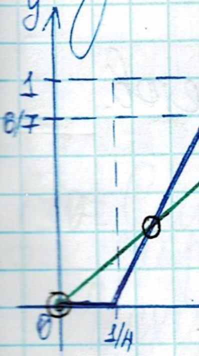
If $x < \frac{1}{4}$

Т.о., $y($

мин

ф-ци

Задача



// Ошиб

].

ре с.р.:

$-6<0$, т.е.

а); также

$\Rightarrow$ с.р. есть!

чших ответов

была вы-

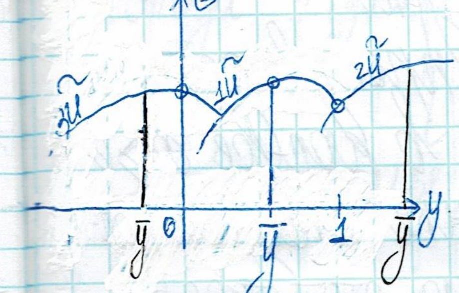
икс. y и макс-

то применяем

изв. по $x=0$)

$+7y=0 \Leftrightarrow$

достиг-ся в



Т.к. $G \frown y$

$G'_y = 0 \Leftrightarrow 4x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{y} = \frac{4x-1}{2}$ — т. max, x фикс.

Когда $\bar y$ нах-ся в $[0,1]$?

$0 \leqslant \bar{y} = \frac{4x-1}{2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \Rightarrow \bar{y}$ в $[0,1]$

If $x > \frac{3}{4}$, то 2й случай;

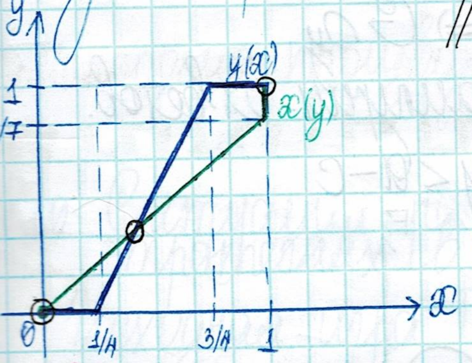
If $x < \frac{1}{4}$, то 3й случай. // $\bar y$ – возр. ф-ция от x //

Т.о., $y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/4, \\ \bar{y} = \frac{4x-1}{2}, & \frac{1}{4} \leqslant x \leq \frac{3}{4}, \\ 1, & \frac{3}{4} < x \leqslant 1 \end{cases}$

// ф. наилучш. ответа непр. $\Rightarrow$ вместо $<$ можно $\leq$ //

мин. ф-ция $\rightarrow$

Задача: решить с-му (можно графически)



// Т. пересечения $\rightarrow$ с.р. // $\circ$

углы $\square$

$(x^0, y^0) = (0,0), (1,1), \left(\frac{7}{16}, \frac{3}{8}\right)$ — с.р.

$\begin{cases} x(y^0) = \frac{7y^0}{6} = x^0 \\ y(x^0) = \frac{4x^0-1}{2} = y^0 \end{cases}$

// Ошибка: $\begin{cases} F'_x = 0 \\ G'_y = 0 \end{cases}$ — так решать эту зад. нельзя! //

3. Модель дуополии Курно

∃ есть 2 фирмы, ∂ производят одинаковый товар: 1ая — в кол-ве $x \geq 0$, 2ая — $y \geq 0$. Когда на рынке оказ-ся кол-во товара $x+y$, то цена на этот товар = $p(x+y) = a - x - y$ — убыв. ф-ция (> товара, цена <). ∃ C — себестоимость произв-ва единицы товара, т.е. if произвели x, то затраты равна Cx; д/обеих фирм себест-ти равны.

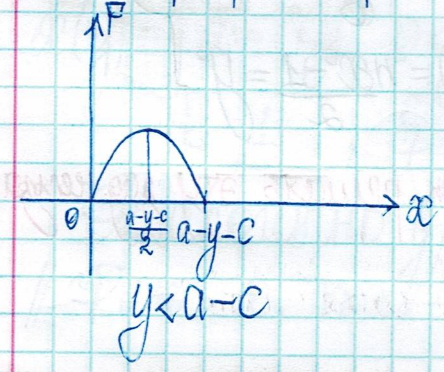
Прибыли (выигрыши) фирм:

$$F(x,y) = \underbrace{\overset{\nearrow \text{цена}}{p}(x+y)x}_{\text{выручка}} - \underbrace{Cx}_{\text{затраты}} = x(a-x-y-C) \Rightarrow F \frown_x$$

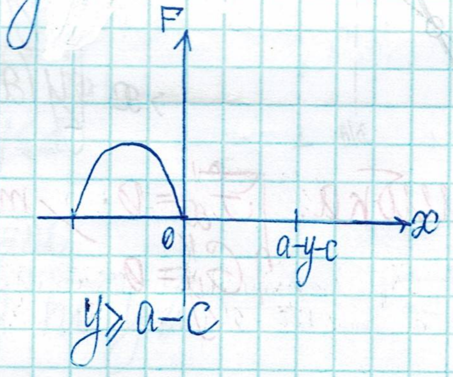
$$G(x,y) = (a-x-y-C)y \Rightarrow G \frown_y$$

Построим ф-ции наилучш. ответов.

Д/1й фирмы: фикс. y.



$y < a - c$

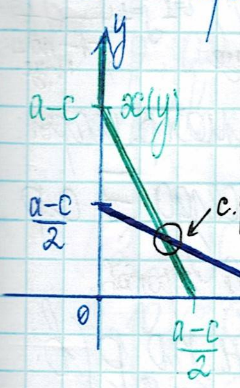


$y > a - c$

Тогда

Д/2й ф

Постр



// Монополи

§10. Смеш
страт

Исходн

$B = (b_{ij})_{m \times n}$

// Смеш. стр. н
разрешать не

водат оди-

тве $x \geq 0$,

аз-ся кол-во

товар =

(> товара,

произв-ва

вели x,

иц фирм

ом:

$y-C) \Rightarrow F\nearrow x$

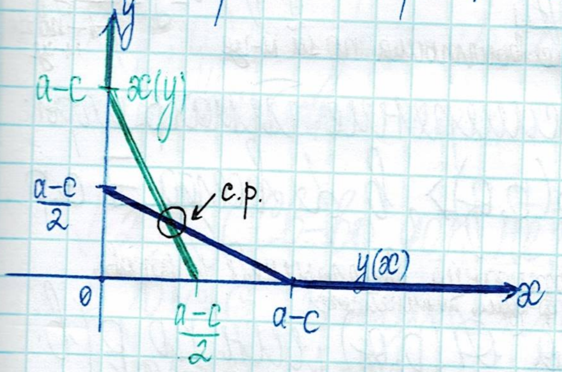
ветов.

$\rightarrow x$

Тогда $x(y)=\begin{cases}\frac{a-y-c}{2}, & y<a-c,\\ 0, & y\geq a-c\end{cases}$

Для 2й фирмы аналогично: $y(x)=\begin{cases}\frac{a-x-c}{2}, & x\leq a-c,\\ 0, & x\geq a-c\end{cases}$

Построим графики и найдем равновесие.



<u>Упр</u> Найти (x^0, y^0)

P.S. $x^0 = y^0$

<u>Упр</u> Посмотреть производство товара x^0+y^0.

<u>Упр</u> ∢ случай, когда одна фирма – монополист, ее ф-ция выигрыша $F(x)=(a-x-C)x$. Найти max ф-ции в x^*. Сравнить дуополию (x^0+y^0) и монополию (x^*)

// Монополия производит <, а цена выше //

§10. Ситуации равновесия в смешанных стратегиях в биматричных играх

Исходная игра Г биматр.: $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$ // Не всегда ∃ сит. рав. в чист. стр. (как и в матричных)//

// Смеш. стр. позволяют находить с.р. в смеш. стр. и разрешать некот. задачи с ∄ с.р. в чистых стр.//

Построим смеш. расширение биматр. игры: 1ый использует смеш. стр. $p \in P$ //полная аналогия с матрич. играми//, p — вер-ный в-р размер-ти m; 2ой — $q \in Q$, q — вер. в-р размер-ти n. Ожидаемый выигрыш 1го:

$$\mathcal{A}(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_i\, a_{ij}\, q_j}_{\text{осреднение выигрыша по 1ій м-це}}; \quad 2го: B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{p_i\, b_{ij}\, q_j}_{\text{—//— по 2ій м-це}}$$

Тогда смеш. расширение биматр. игры: $\overline{\Gamma} = \langle P, Q, \mathcal{A}(p,q), B(p,q) \rangle$, в $\mathcal{L}$ всегда $\exists$ с.р.,

мн-ва смеш. стр., вып. компакты

мат. ожидания выигрышей игроков, непр. ф-ции, билинейные

потому что ф-ция $\mathcal{A}(p,q)$ лин. по p (в част-ти $\frown_p$), а $B(p,q)$ — лин. по q (в част-ти $\frown_q$) $\Longrightarrow \{\nabla 2.1\} \Longrightarrow \exists$ с.р. (p^0, q^0) в $\overline{\Gamma}$, т.е. это с.р. в смеш. стр. исходной биматр. игры Γ.

По опр., (p^0, q^0): $\begin{cases} \mathcal{A}(p,q^0) \leqslant \mathcal{A}(p^0,q^0), \ \forall p \in P, \\ B(p^0,q) \leqslant B(p^0,q^0), \ \forall q \in Q \end{cases}$

аналогичны св-вам реш-я матр. игры в смеш. стр. (§4)

∢ св-ва с.р. в смеш. стр.

(*) д/биматр. игр

Лемма 1. Д/того, чтобы (p^0, q^0) была с.р. в смеш. стр. $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}(i,q^0) \leqslant \mathcal{A}(p^0,q^0)$, $i = \overline{1,m}$,

//If B=−A, то (*) в матр. игре// $B(p^0, j \leqslant B(p^0,q^0)$, $j = \overline{1,n}$. (*)

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ ∃

Опр-я :

$\boxed{\Leftarrow}$ ∃д

смеш. с

∀p∈

Складыв

= $\mathcal{A}(p^0,$

Анал

∇2.2

— с.р. в

1) $p_i^0 > 0$ =

2) $q_j^0 > 0$ =

▲ 1) Т.к.

усл-е (*

кое i_1 : p

чить (!?

тогда, до

⇒ складо

2) Анал

…рение биматр.

…тр. $p\in P$ //полная

…р-ный в-р

…q – вер. в-р раз-

…грыш 1го:

…$(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{p_i b_{ij} q_j}_{\text{-//- по 2й м-це}}$

…й м-це

…биматр. игры:

… всегда ∃ с.р.,

…шей игроков,

…ин. по p (в

…по q (в част-ти

…в $\overline{\Gamma}$, т.е. это

…атр. игры Г:

…$(p^0,q^0), \forall p\in P$,

…$(p^0,q^0), \forall q\in Q$

…(p^0,q^0) была

…$(p^0,q^0),\ i=\overline{1,m}$, (*)

…$(p^0,q^0),\ j=\overline{1,n}$.

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ ∃ (p^0,q^0) – с.р. $\overset{?}{\Rightarrow}$ (*). Это $\Rightarrow$ из опр-я: вместо p – i, вместо q – j $\Rightarrow$ (*).

$\boxed{\Leftarrow}$ ∃ (p^0,q^0) вып-на (*) $\overset{?}{\Rightarrow}$ это с.р. в смеш. стр.

$\forall p\in P$ и $p_i\geq 0$: $p_i A(i,q^0)\leq p_i A(p^0,q^0),\ i=\overline{1,m}$.

Складывая нер-ва: $A(p,q^0)\leq\sum_{i=1}^{m}p_i A(p^0,q^0)=$
$=A(p^0,q^0)\Rightarrow$ док-но 1е нер-во из опр-я с.р.

Аналогично со 2м нер-вом ■

▼2.2 (Св-во доп. нежесткости) ∃ $(p^0;q^0)$ – с.р. в с.с., тогда справедливо:

1) $p_i^0>0\Rightarrow A(i,q^0)=A(p^0,q^0)$

2) $q_j^0>0\Rightarrow B(p^0,j)=B(p^0,q^0)$

▲1) Т.к. $(p^0;q^0)$ – с.р. в с.с., то по Л.1 вып-ся усл-е (*). Предположим, что найдется такое i_1: $p_{i_1}^0\overset{\text{нежестко}}{>}0$ и $A(i_1,q^0)\overset{\text{нежестко}}{<}A(p^0;q^0)$. Как получить (!?)? Известно, что $A(i,q^0)\overset{(*)}{\leq}A(p^0,q^0)$, тогда, домножив его на $p_i^0\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &p_{i_1}^0 A(i_1,q^0)<p_{i_1}^0 A(p^0;q^0),\\ &p_i^0 A(i,q^0)\leq p_i^0 A(p^0;q^0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ складывая при всех $i\Rightarrow A(p^0,q^0)<A(p^0,q^0)\Rightarrow$ (!?)

2) Аналогично ■

чисто логическое → **Сл** ∃ (p^0, q^0) – с.р. в с.с. Тогда:

1) $A(i, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p_i^0 = 0$

2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0$

Примеры.

1. Игра "Семейный спор"

$$\underset{\uparrow\ \text{жена}}{A} = \begin{array}{cc} q_1^0 & 1-q_1^0 \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right. & \left.\right) \end{array} \qquad \underset{\uparrow\ \text{муж}}{B} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1^0 \\ 1-p_1^0 \end{matrix} \end{array} \qquad \text{С.р. в с.с.} - ?$$

вер-ть — вер-ть

$0 < p_1^0 < 1$ $\qquad$ $0 < q_1^0 < 1$

// p^0 ищется с помощью м-цы B,
q^0 ищется с помощью м-цы A //

Из св-в доп. неж. $\Rightarrow A(1, q^0) = A(p^0, q^0)$,
$A(2, q^0) = A(p^0, q^0)$

// Скалярно умножаем 1ую стр. на q_1^0 //

$$\begin{cases} q_1^0 = A(p^0, q^0) \\ 2(1-q_1^0) = A(p^0, q^0) \end{cases} \Leftrightarrow q_1^0 = 2(1-q_1^0) \Leftrightarrow q_1^0 = 2/3 \Rightarrow q^0 = \Big(\underset{\text{Ф}}{\tfrac{2}{3}}, \underset{\text{Т}}{\tfrac{1}{3}}\Big)$$ — смеш. стр. мужа

Аналогично: $B(p^0, 1) = B(p^0, q^0)$,
$B(p^0, 2) = B(p^0, q^0)$

$$\begin{cases} 2p_1^0 = B(p^0, q^0), \\ 1 - p_1^0 = B(p^0, q^0) \end{cases} \Leftrightarrow p_1^0 = 1/3 \Rightarrow p^0 = \Big(\underset{\text{Ф}}{\tfrac{1}{3}}, \underset{\text{Т}}{\tfrac{2}{3}}\Big)$$

$A(p^0,$
Как р
физич. с
∃ ес
Т в 2 раза
Ф в 2. раза
У кажд
друг от

2. ∃ 2
игрок 1
игрок 2
Выигры

Упр
Смеш.

реш-я с-
ответ:

Тогда:

С.р. в с.с. – ?

B,

$\mathcal{A}$ //

$\mathcal{A}(p^0, q^0)$,

$\mathcal{A}(p^0, q^0)$

а q_1^0 //

$\Leftrightarrow q_1^0 = 2/3$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{3}$) — смеш. стр. мужа

Т

q^0),

, q^0)

, $\frac{2}{3}$)

Т

$\mathcal{A}(p^0, q^0) = B(p^0, q^0) = 2/3$ — выигрыши

Как разрешить семейный спор? Исп-ть физич. смеси, т.е.:

на год вперёд

суббота, воскресенье

// Т в 2 раза больше //

// Ф в 2 раза больше //

∃ есть календарь:	С	В	С	В	С	В
жена	Т	Ф	Ф	Т	Т	Т
муж	Т	Ф	Ф	Ф	Ф	Т

// У каждого свой календарь, заполняют независимо друг от друга, затем сверяют: if Т, то Т,
if Ф, то Ф,
if не совпадают, то никуда не идут //

2. ∃ 2 игрока (стороны):

игрок 1 – 2 стр. – нарушать/не нарушать правила

игрок 2 – 2 стр – ввести санкции/не ввести санкции

Выигрыши: $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \wedge & \vee \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ нар. / не нар.; сан. / не сан. $\quad B = \begin{pmatrix} a_2 > b_2 \\ c_2 < d_2 \end{pmatrix}$

<u>Упр</u> Проверить, что нет с.р. в ч.с.

Смеш. стр.: if считать, что $0 < p_1^0 < 1$,
$0 < q_1^0 < 1$, то

реш-я с-мы, как в пред. примере, получим ответ: $q_1^0 = \frac{b_1 - d_1}{c_1 - a_1 + b_1 - d_1}$, $p_1^0 = \frac{d_2 - c_2}{a_2 - b_2 + d_2 - c_2}$

Упр Проверить ответы и д-ть ! с.р.

Смысл: p_1^0 понимается как доля наруш
ний, а q_1^0 – доля наказаний ⇒ равновесие

Метод поиска с.р. в с.с. в биматр игре в общем случае.

∇2.3. $X = \{1, \dots, m\}$ – мн-во ч.с. 1го,
$Y = \{1, \dots, n\}$ – мн-во ч.с. 2го.

∃ (p^0, q^0) – с.р. в с.с. биматр. игры. Тогда ∃ $\underset{\nwarrow \text{п/мн-во ч.с.}}{X^0} \subset X$, $Y^0 \subset Y$ и ∃ v_1, v_2:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1, \ \forall i \in X^0 \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q_j^0 = 1; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, \ \forall j \in Y^0; \\ \sum\limits_{i \in X^0} p_i = 1. \end{cases} \quad (2)$$

▲ ∃ $X^0 = \{i \mid p_i > 0\}$, $Y^0 = \{j \mid q_j^0 > 0\}$;
$v_1 = A(p^0, q^0)$, $v_2 = B(p^0, q^0)$.

$$\sum_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0 = A(i, q^0) \underset{\uparrow p_i^0 > 0}{\overset{\text{св-во д.н.} \downarrow}{=}} A(p^0, q^0) = v_1$$

$\sum\limits_{j \in Y^0} q_j^0 = 1$, т.к. в Y^0 все j: $q_j^0 > 0$.

С-ма (2) выводится аналогично ■

В с-ме (1) неизв. – q_j^0, $j \in Y^0$; v_1;
В с-ме (2) неизв. – p_i^0, $i \in X^0$; v_2.
М-цы с-м имеют вид: все опред-ся п/м-цей

доля наруше-

⇒ равновесие.

с.с. в биматр.

ч.с. 1го,

ч.с. 2го.

гры. Тогда

$\forall j \in Y^0$;

(2)

ично ■

$^0; v_1$;

$^0; v_2$.

опред-ся п/м-цей

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{п/м-ца} \\ \text{м-цы } A}}{\overline{A}} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$, $\underset{\substack{\nearrow \\ -//- \; B}}{\overline{B}} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$.

If м-цы квадратные, то с-мы реш-ся, т.е. $|X^0| = |Y^0|$ //мн-ва содержат одинак. число эл-тов//

Утв ∃ такая с.р., д/л в этих с-мах (1) и (2) м-цы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ явл-ся квадратными.

▲ Без док-ва ■

С.р. в с.с. строятся на основе утв-я выше: перебираем □-ные п/м-цы, решаем с-мы

(Алгоритм)

Метод поиска некоторых ситуаций в смеш. стр. биматр. игры

У нас есть м-цы A, B; перебираем □-ные п/м-цы $\overline{A}, \overline{B}$ размера $k \times k$, где $k = 2, 3, \dots$

Алгоритм: на произвольном шаге k есть □ные п/м-цы $\overline{A}, \overline{B}$; решаем с-мы 1), 2), где кол-во ур-й = кол-ву неизв-х. If какие-то p_i^0, q_j^0 отрицат., то переходим к след. п/м-це. If p_i^0, q_j^0 неотриц., то дополняем их нулями до смеш. стр. $p^0 = (\dots \overset{i \notin X^0}{0} \; \overset{i \in X^0}{p_i^0} \dots)$; аналогично д/ 2го: $q^0 = (\dots \underset{j\notin Y^0}{0}\ \underset{j\in Y^0}{q_j^0} \dots)$. Смеш. стр. построено, проверяется усл-е (*) д/ пары стр., if вып-но, то это с.р. в с.с.

p^0 и q^0 удовл. с-мам (1) и (2).

If $\sum\limits_{j\in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1$ умножим на p_i^0, $i \in X^0$; сложим,

$\Longrightarrow \boxed{\begin{matrix} A(p^0, q^0) = v_1 \\ B(p^0, q^0) = v_2 \end{matrix}}$ – это вытекает из с-м (1) и (2)

//Аналогично//

Поэтому (*): $\begin{cases} A(i, q^0) \leq v_1, & i = \overline{1,m}, \\ B(p^0, j) \leq v_2, & j = \overline{1,n} \end{cases}$

Заметим, что if $i \in X^0$, то в (*) будут рав-ва; аналогично, if $j \in Y^0$

После этого переходим к другой (след.) п/м-це. Наша цель: найти как можно больше с.р. в с.с.

Частный случай: в м-це 2 строки или 2 столбца $\Rightarrow$ геометр. построение.

∃ биматр. игра с м-цей размера $2\times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

Особенность: смеш. стр. 1го p_1: $0 \leq p_1 \leq 1$ –

смеш. стр. пост-
д/ пары стр., if

)

, $i \in X^0$; сложим,
ет из с-м (1) и (2).

$=\overline{1,m}$,
$j=\overline{1,n}$
о в (*) будут

к другой (след.)
как можно

-це 2 строки
остроение.
азмера 2×n:
$\ldots\ b_{1n}) \quad p_1$
$\ldots\ b_{2n}) \quad 1-p_1$
0 p_1: $0 \le p_1 \le 1$ –

– вер-ть выбора I строки

Перебираем п/м-цы 2×2, к опред-ся номерами столбцов j_1, j_2. Применим алгоритм.

Смеш. стр. 1го p_1^0. Берем п/м-цу B со столбцами j_1, j_2:

$$\overline{B} = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1^0 \\ 1-p_1^0 \end{array} \end{array}$$

//по столбцам//

Выпишем с-му (2): $\begin{cases} b_{1j_1} p_1^0 + b_{2j_1}(1-p_1^0) = v_2 \\ b_{1j_2} p_1^0 + b_{2j_2}(1-p_1^0) = v_2 . \end{cases}$

Решаем с-му. If $0 \le p_1^0 \le 1$, то это компонента смеш. стр. (вер-ть); if нет, то переходим к другим j_1, j_2.

$\exists$ $0 \le p_1^0 \le 1$, переходим к $\overline{A}$. Будем искать смеш. стр. 2го в виде $q^0 = (0 \ldots 0 \overbrace{q^*}^{j_1} \ldots 0 \overbrace{1-q^*}^{j_2} 0 \ldots)$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overset{q^*}{a_{1j_1}} & \overset{1-q^*}{a_{1j_2}} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}.$$

Выпишем с-му (1):

$$\begin{cases} a_{1j_1} q^* + a_{1j_2}(1-q^*) = v_1, \\ a_{2j_1} q^* + a_{2j_2}(1-q^*) = v_1 . \end{cases}$$

Решаем ее. If $0 \le q^* \le 1$, то всё ОК. Используем усл-е (*), чтобы убедиться в равновесии ситуации.

$\begin{cases} \mathcal{A}(1, q^0) = v_1, \\ \mathcal{A}(2, q^0) = v_1 \end{cases}$ ⟹ вып-но автоматически

чтобы облегчить

$B(p^0, j) \le v_2$, $j \ne j_1, j_2$ — проверим это. If вып-но, то это с.р. в с.с.; if нет — переходим к след. j_1, j_2

Геометр. интерпретация

$\exists$ м-ца B, j-й столбец; введем ф-цию

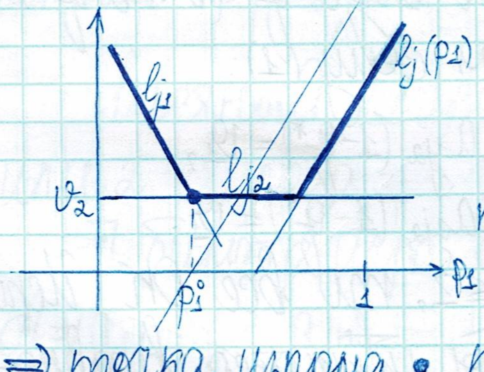
$$l_j(p_1) = b_{1j}\, p_1 + b_{2j}\,(1 - p_1) = B(p, j)$$

$$(2) \Longleftrightarrow \begin{cases} l_{j_1}(p_1) = v_2, \\ l_{j_2}(p_1) = v_2 \end{cases} \Longleftrightarrow l_{j_1}(p_1) = l_{j_2}(p_1)$$

Найдем т. пересеч-я прямых ⟹ найдем p

$B(p^0, j) \le v_2$, $j \ne j_1, j_2$ ~ $l_j(p_1^0) \le v_2$, $j \ne j_1, j_2$ (☆)

Итак, что это означает геометрически?



Смотрим на т. пересеч-я прямых.

(☆) означает, что остальные прямые проходят ниже точки ⟹

⟹ точка излома • принадлежит верхней огибающей _/ семейства ф-ций.

т.е.,

построить

огибающ

Нашл

⟹ реши

Далее

т.д.

If м

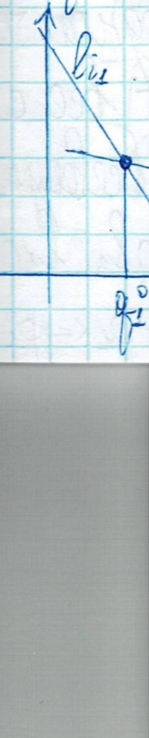
< ее ге

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11}^{q_1} \\ i_1\ - - - \\ \dots \\ i_2\ - - - \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

→ Тогд

ф-циям

$= a_{i1} q_1 +$



чески

и это. If

нет — пере-

ф-цию

$\Rightarrow$ найдем p_i^*

, $j \neq j_1, j_2$ (★)

геометрически

на т. пересеч.

т, что остальны

иже точки $\Rightarrow$

верхней

Т.е., чтобы сократить перебор, необх. построить семейство мин. ф-ций, взять верх. огибающую (— связано с (★)) и смотреть т. излома.

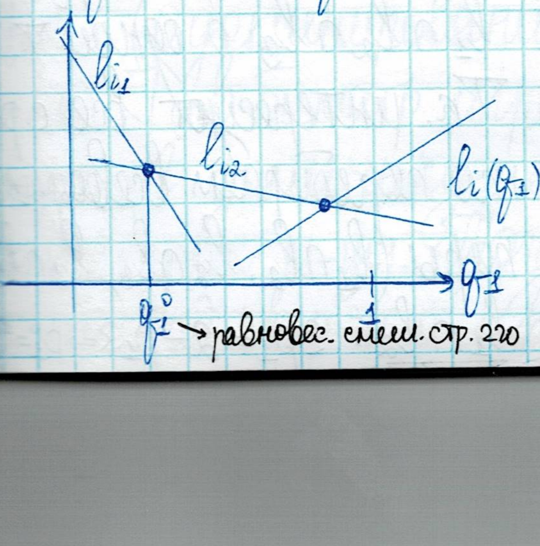
Нашли $p_i^* \Rightarrow$ переход к м-це $A \Rightarrow q^* \Rightarrow$
$\Rightarrow$ решить с-му (1)

Далее переходим к другой т. излома и т.д.

If м-цы размером $m \times 2$, то аналогично ∢ ее геометр. часть.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ i_1 \\ \\ i_2 \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} q_1 & 1-q_1 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ - - - & - - - \\ \dots & \dots \\ - - - & - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \end{array} \right) \leftarrow \text{смеш. стр. 220} \qquad B = \begin{array}{c} \\ i_1 \\ \\ i_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ - - - & - - - \\ \dots & \dots \\ - - - & - - - \\ b_{m1} & b_{m2} \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ p^* \\ \\ 1-p^* \\ \\ \end{array}$$

→ Тогда построение связано с мин. ф-циями след. вида $l_i(q_1) = A(i, q) =$
$= a_{i1} q_1 + a_{i2}(1 - q_1)$



→ равновес. смеш. стр. 220

Аналогично пред., берем т. верхней огибающей. Автоматически вып-ся (★), т.к. точки верх. огибающей-

Взяв точку, перейдем на п/м-цу м-цы B, ищем равновес. смеш. стр. 220 в виде $p^0 = (0 \dots 0 \; \overset{i_1}{p^*} \; 0 \dots 0 \; \overset{i_2}{1-p^*} \; 0 \dots 0)$, откуда p^* ищ-ся из $\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} \end{pmatrix}$ ⇒ по столбцам

$$\begin{cases} b_{i_1 1} p^* + b_{i_2 1}(1-p^*) = v_2, \\ b_{i_1 2} p^* + b_{i_2 2}(1-p^*) = v_2 \end{cases} \Rightarrow \text{решаем} \Rightarrow$$

⇒ if $0 \le p^* \le 1$, то равновес. $\overset{\text{смеш. стр.}}{120}$ построена ⇒
⇒ с.р. найдена

!К/р (8)

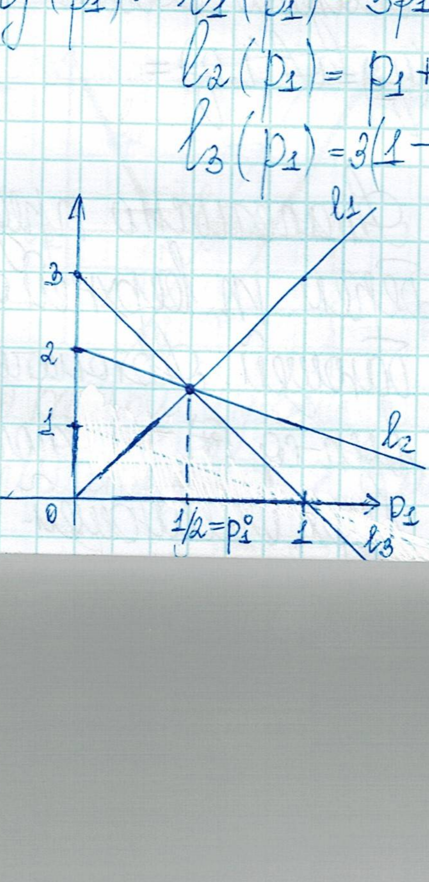
Пример (построения с.р)

$$\mathcal{A} = \begin{array}{ccc} q^* & 1-q^* & \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ ✓ & ✓ & ✓✓ \end{array} \qquad B = \begin{array}{cccc} ✓ & ✓ & & \\ 3 & 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 2 & 3 & 1-p_1 \\ ✓ & ✓ & ✓✓ & \end{array}$$

$l_j(p_1)$: $l_1(p_1) = 3p_1$

$l_2(p_1) = p_1 + 2(1-p_1) = 2 - p_1$

$l_3(p_1) = 3(1-p_1) = 3 - 3p_1$



$l_1 \cap l_2 \cap l_3$ в одной т.

Т.к. интересуют все с.р., то перебираем всевозможн. пары ($l_1 \cap l_2$, $l_2 \cap l_3$, $l_1 \cap l_3$)

$\underline{l_1 \cap l_2}$: $3p_1 = 2 - p_1 \Leftrightarrow p_1^0 = 1/2$

$2q^* + 4($

$4q^* + 2($

$q^* \in [0,1]$

с.р.

$\underline{l_1 \cap l_3}$: p

$2q^* + 5($

$q^0 = (\frac{2}{3}, 0,$

$p^0 = (\frac{1}{2},$

$\underline{l_2 \cap l_3}$: p

$4q^* + 5($

// Мб зам

Упр Тра
найти

Доми

// ∇1.11,

∇2.4. (од

игре)]

м-цы $\mathcal{A}$

ных стро

с нулевой

$$\begin{cases} 2q^* + 4(1-q^*) = \upsilon_1 \\ 4q^* + 2(1-q^*) = \upsilon_1 \end{cases} \Leftrightarrow 2q^* - 2(1-q^*) = 0 \Leftrightarrow q^* = 1/2$$

$q^* \in [0,1] \Longrightarrow$ равновес. стр. $\left\{ q^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ p^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$ – с.р.

$\underline{l_1 \cap l_3}$: $p^\circ = 1/2$

$2q^* + 5(1-q^*) = 4q^* + 1 - q^* \Leftrightarrow q^* = 2/3 \Longrightarrow$ с.р.

$$\begin{cases} q^\circ = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \\ p^\circ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\underline{l_2 \cap l_3}$: $p^\circ = 1/2$

$4q^* + 5(1-q^*) = 2q^* + 1 - q^* \Leftrightarrow q^* = 2 \stackrel{1}{\neg} \Longrightarrow$ с.р. нет

// Мб заметить еще в м-це: стр. (4 5) доминирует (2 1) //

__Упр__ Транспонировать м-цы и решить зад: найти алгоритмом с.р.

Доминирование в биматричных играх.

// Т 1.11, Т 1.12 – в матрич. играх //

Т 2.н. (о доминировании строк в биматр. игре)] в биматр. игре некотор. строка м-цы A доминируется вып. комб. остальных строк м-цы. Тогда эта строка входит с нулевой вер-тью в некот. равновес. смеш. стр. 120.

(Её можно вычеркнуть). If указ. доминирование строгое, то она входит с нулев. вер-тью в $\forall$ равновес. смеш. стр. 1го.

▲ Аналогично ■

T2.5 (О доминировании столбцов в биматрич. игре)] в биматр. игре некот. столбец м-цы B доминир-ся вып. комб-цией остальных столбцов этой м-цы. Тогда этот столбец входит с нулев. вер-тью в некотор. равновес. смеш. стр. 2го (ее можно вычеркнуть). If указ. домин-ние строгое, то он входит с нулев. вер-тью в $\forall$ равновес. смеш. стр. 2го.

▲ Аналогично ■

!Зам (Поиск с.р. в ч.с. биматр игр) Можно исп-ть соображ-я домин-ния, т.е. в чист. стр. есть биматр. игра A, B; при этом домин-ние обычное, без вып. комб. (просто одна строка/столбец доминирует

каз. домини-
дит с нерав.
стр. 120.

буцов в би-
некот. стол-
комб-цией
цы. Тогда
вер-тью в
его (ее мож-
н-ние строго
о в ∀ равновес.

матр. игр)
ин-ниа, т.е.
A, B; при
еп. комб.
минирует

фициную/-ой, тогда домин-мый эл-т вычеркивается).

If ищем с.р. в ч.с., то при строгом домин-нии с.р., if они были, то они останутся.

Напр., $A=$

← не м.б. равновесной, т.к. выгодно отклон-ся в сторону домин-ния

При нестрог. дом-нии — возможны потери.

! с.р. в ч.с.

Пример $A=\begin{pmatrix}\textcircled{2} & 0 & 8\\ 2 & 2 & 8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}\textcircled{2} \leqslant & 2 & 1\\ 0 < & 6 & 7\end{pmatrix}$

Вычеркивая столбцы, получаем биматр. игру, в α нет с.р. в ч.с., хотя в исходной она есть ○

// В матр. играх такой ситуации не м.б. //

посылает сообщения

Верхнее и нижнее звено управл-я
(начальник) (подчиненный)

§11. Иерархические игры двух лиц 12/10

// Игры, в α игроки прежде, чем выбрать стр. x и y, обмениваются предварительной инф-цией //

В прошлый раз определили игру — общ. неантаг. двух лиц

$\Gamma = \langle \underbrace{X, Y}_{\text{мн-ва стр.}}, \underbrace{F(x,y), G(x,y)}_{\text{ф-ции выигрыша}} \rangle$ — игра в норм. форме — игроки выбир. стр. независимо

На основе этой игры будем строить иерарх.

игры, в ∠ будет завис. выбор м/x и y

Будем считать, что X и Y – компакты метрич. пр-в (напр., замкн. огр. мн-ва в евклид. пр-вах), ф-ции выигрыша $F(x,y)$ и $G(x,y)$ непр. на $X \times Y$.

иерарх. игра

1ый выбирает

$$\Gamma_1 : x \xrightarrow{2} y$$ //x сообщ-ся 2му, 2й выбир. y, зная x//

неантаг., норм. формы нет

обмен инф-цией

//1ый – игрок лидер//

Экономич. интерпретация: 1ый – Центр – выбирает цену $\overset{x}{}$ на продукцию $\overset{y}{}$, ∠ производит производитель – 2й

Нас в иерарх. играх интересует наилучш. гарант-й выигрыш, ∠ может получить 1ый.

Как реагирует 2й на сообщ-е 1го? Будем считать, что $y \in Y(x)$ – 2й выберет стр. y из мн-ва $Y(x)$, т.е. выберет свой наилучш. ответ на x: $y \in Y(x) = \mathrm{Arg}\max\limits_{y \in Y} G(x,y) \Rightarrow$

мн-во y, ∠ максимизирующие д/2го игрока; непустое мн-во; компакт

$\Rightarrow$ 2ой рациональный, умеет макс-ть, оптим-ть, выберет наилучш. ответ на x

Гарант. выигрыш 1го: $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} F(x,y)$

достиг-ся

непр. по y

м/x и y
– компакты
пр. мн-ва в
рыша $\mathcal{F}(x,y)$

выбир. y, зная x//
//

1ый – Центр –
, 2 производит

ет наилучш.
учесть 1ый.
е 1го? Будет
выберет стр.
евой наилучш.
$G(x,y) \Longrightarrow$

компакт
кс-ть, оптим-ть
достиг-ся
непр. по y
$) = \min\limits_{y\in Y(x)} \mathcal{F}(x,y),$

т.к. 2ой себя оптимизирует, но дальнейшее поведение неизв. $\Longrightarrow$ в худшем случае 1ый рассчитывает на получ-е min

не всегда достиг-ся

Наилучш. гарант. рез-т (выигрыш) д/1го: $\mathcal{F}_1 = \sup\limits_{x\in X} W(x)$

Опр ⌉ $\varepsilon > 0$. $x^{\varepsilon} \in X$ наз-ся ε-оптимальной, if д/нее гарантир. выигрыш $W(x^{\varepsilon}) \geq \mathcal{F}_1 - \varepsilon$

//Эта стр. реализует sup с точностью до ε// //$\varepsilon = 0 \Longrightarrow$ оптим. стр.//

⌉ $Y(x) = \{y(x)\}$ (единств. эл-т), $\forall x \in X$. Максимиз. эл-т $y(x)$ — ф-ция/отображ-е, являющ-ся непр. по $T_{1.2.} \Longrightarrow W(x) = \mathcal{F}(x, y(x))$ — непр. $\Longrightarrow$ max достиг-ся $\Longrightarrow$ оптим. стр. $\exists$.

Что значит решить иерарх. игру Γ_1? Необх. указать (найти) $\mathcal{F}_1$, затем найти оптим. стр., if она $\exists$, или ε-оптим. стр.

Равновесие по Штакельбергу

⌉ 1ый сообщ. 2му x, 2ой выбирает $y \in Y(x)$, как наилучш. ответ на этот x. ⌉ 2ой благожелателен по отнош-ю к 1му $\Longrightarrow$

выбирает не просто наилучш. ответ, а с учетом того, что он хочет помочь 1му $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ на мн-ве max-т ф-цию выигр. 1го, т.е. $y \in Y^*(x) = \underset{y \in Y(x)}{\mathrm{Argmax}}\, F(x,y)$. Тогда $W(x)$ изм-ся: $W^*(x) = \max\limits_{y \in Y(x)} F(x,y) \Rightarrow$ 1ый старается $W^*(x)$ увеличивать: $F_1^* = \max\limits_{x \in X} W^*(x) \overset{\text{достиг-ся (покажем позже)}}{=} W^*(x^0)$

Опр Пара $(x^0; y^0)$ наз-ся равновесием по Штакельбергу, if выполнено:

$W^*(x^0) = F_1^*$, //1ый выбирает оптим. стр.//

$y^0 \in Y^*(x^0)$ //2ой из лучших выбирает лучшее д/1го//

Лемма 2. В сделанных предполож-х в игре $\exists$ равновесие по Ш. (x^0, y^0)

▲ //Дост. д-ть достиж-е max в $F_1^* = \max\limits_{x \in X} W^*(x)$//

$F_1^* = \sup\limits_{x \in X} W^*(x)$

По опр-нию верх. грани $\exists$ посл-ть стр-й $x^k \in \overset{\text{компакт}}{X}$: $W^*(x^k) \to F_1^*$. Без потери общ-ти: $x^k \to x^0 \in X$ //if выбрать соотв. п/посл-ть// //св-во компакт-ти д/мн-ва X//

$\exists$ посл-ть $y^k \in Y^*(x^k)$. Без потери общ-ти: $y^k \to y^0 \in Y$ //if выбрать соотв. п/посл-ть//

. ответ, а

ючь 1му $\Rightarrow$

ыигр. 1го, т.е.

Тогда $W(x)$

и старается

(…кажем позже)

$(x) = W^*(x^0)$

вновесием

но:

учшее д/1го//

редполож-х

$,y^0)$

(x)//

осл-ть стр-й

ери огр-ти:

// //св-во компакт-ти д/мн-ва X//

ери огр-ти:

9

Покажем, что $y^0 \in \mathcal{Y}(x^0)$. //предел. стр. 2го y^0 – наилуч. ответ д/ x^0//

$G(x^k, y) \leqslant G(x^k, y^k)$, по опр. y^k – наилучш. ответ. на x^k, $y^k \in \mathcal{Y}(x^k)$, $\forall y \in \mathcal{Y}$. Фикс. $\forall y$ и переходим к $\lim\limits_{k\to\infty}$ (G непр. как ф-ция 2ух перем-х): $G(x^0, y) \leqslant G(x^0, y^0)$, $\forall y \in \mathcal{Y} \Rightarrow y^0 \in \mathcal{Y}(x^0)$

Покажем, что на x^0 достиг-ся $\mathcal{F}_1^* = \max\limits_{x\in X} W^*(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} W^*(x^k) \overset{def}{=} \mathcal{F}(x^k, y^k) \longrightarrow \mathcal{F}(x^0, y^0) \\ \downarrow \\ \mathcal{F}_1^* \end{array}\right\} \Rightarrow F_1^* = F(x^0, y^0)$$

← выбор x^k

непр., как ф-ция 2х перем-х

$$\mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}(x^0, y^0) \leqslant \underset{\max\limits_{y\in \mathcal{Y}(x^0)} \mathcal{F}(x^0, y)}{\{y \in \mathcal{Y}(x^0)\}} \leqslant W^*(x^0)$$

< быть не может, т.к. F_1^* – sup $\Rightarrow$ мб только = ■

23

Пример 1 (Биматрич. игра)

!к/р (9)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 6 & 8 \\ \boxed{4} & \boxed{3} & 2 \\ 7 & \boxed{-5} & \boxed{4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 4 & 3 \\ \boxed{7} & \boxed{7} & 3 \\ -1 & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1: \ \mathcal{Y}(i) = \mathop{Arg\,max}\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} b_{ij} \Rightarrow \mathcal{Y}(1) = \{1\}$$

наилучш. ответы 2го

$$\mathcal{Y}(2) = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{Y}(3) = \{2, 3\}$$

//фикс. строку, ищем номер столбца с max эл-том//

//в каждой строке среди □ ищем min эл-т//

$$W(i) = \min\limits_{j\in \mathcal{Y}(i)} a_{ij} \Rightarrow W(1) = 3; \ W(2) = 3; \ W(3) = -5$$

$\boxed{\mathcal{F}_1} = 3$ // max среди $W(i)$// ; $\boxed{i^0} = 1, 2$ //оптим. стр//

[Ответ: $\mathcal{F}_1, i^0$]

○

!К/р (10)

Равновес. по Ш. – ?

$Y^*(i) \Longrightarrow Y^*(1)=\{1\}; \quad Y^*(2)=\{1\}; \quad Y^*(3)=\{3\}$

//наилучш. ответ д/1го среди ответов лучших д/2го//

$W^*(1)=3; \quad W^*(2)=4; \quad W^*(3)=4$

$F_1^*=4$

столбец

$(i^\circ, j^\circ) = (2,1), \ (3,3)$ – равновесия по Ш.

Заметим, что равновесие контролирует 1ый : что он сообщит в начале, то и будет. Пример показывает, что 1й должен быть благожелателен по отнош-ю ко 2му

/зад. лб

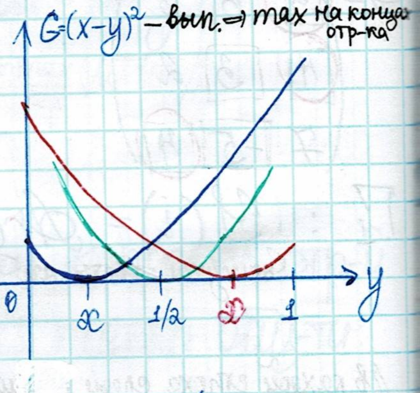
Пример 2. //опт. стр. ¬∃, но ∃ ε-оптим. стр.//

$F(x,y) = 3x+2y, \quad X=[0,1], \quad Y=[0,1].$

$G(x,y)=(x-y)^2$

$$\Gamma_1 : \ Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \ ✓ \\ \{0,1\}, & x=\frac{1}{2} \ ✓ \\ \{0\}, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \ ✓ \end{cases}$$

max



$W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} (3x+2y)$ //берем наихудшее//

воспол

Рав

!, кром

слева б

⇒ (x°, y

При

∃ 1

продук

2

y≥0

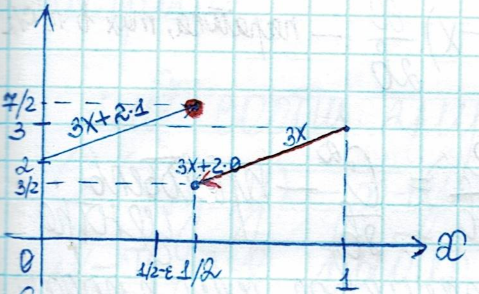
Ф-ц

–приб

G(x,

Y(x

$G'_y =$



$3 < \frac{7}{2} \Rightarrow$ в т. $x = \frac{1}{2}$ ф-ция разрывна $\Rightarrow$ sup не достиг-а

$F_1 = 7/2$

Оптим. стр. нет, но воспол-ся ε-оптим. стр.: $x^{\varepsilon} = 1/2 - \varepsilon$

Равновесие по Ш.–? Всюду ответ 2го !, кроме т. 1/2. График $W^*(x)$: непр-ть слева будет в т. 1/2, а не справа $\Rightarrow F_1^* = 7/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^0, y^0) = (1/2, 1)$ — р. по Ш.

Пример 3 (Центр – Производитель)

$\exists$ 1ый – Центр – выбирает цену x на продукцию, $x \in [0, C]$, $C > 0$

2ой – Производитель – кол-во товара $y \geqslant 0$

Ф-ции выигрыша: $F(x,y) = \overset{\text{центр продает}}{Cy} - \overset{\text{тратит}}{yx} = (C-x)y$ — прибыль Центра;

$G(x,y) = xy - \underbrace{by^2}_{\text{затраты}}$ — прибыль произв-ля.

$Y(x) = \max\limits_{y \geqslant 0} (xy - by^2)$ вогн.

$G'_y = 0 \Leftrightarrow x - 2b\bar{y} = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \overbrace{x/(2b)}^{\geqslant 0} = y(x)$

$W(x) = \mathcal{F}(x, y(x)) = (C - x)\dfrac{x}{2b}$ — парабола, max в т. $C/2$

$x^\circ = C/2$

$\mathcal{F}_1 = W(x^\circ) = \left(C - \frac{C}{2}\right) \cdot \frac{C}{4b} = \frac{C^2}{8b}$ — прибыль центра

//Т.е. 1ый закупает дешевле, чем продает//

Γ_2: 1ый, выбирая x, уже знает y 2го.

заготовленная до игры

$f: Y \to X$ — ф-ция 1го, т.к. инф-ция об y известна ⟹

⟹ $x = f(y)$ — ф-ция ответов //отвечает по-разному в завис-ти от y//

Соотн-я в Γ_2: игрок-лидер (1ый) сообщает ф-цию f 2му, 2ой выбирает y, сообщает y 1му ⟹ 1ый выбир. $x = f(y)$

$f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$

Экономич. интерпретация:

1ый — Центр — x - размер премии производителя,
2ой — Произв-ль — y - кол-во продукции
$f(y)$ — размер премии в зав-ти от кол-ва произведенного товара

//Другая не экономич. интер-ция: политич. игры//

Игроки рациональные, max-т свой

выигрыш

1ый

− G(f(y

max-т,

//Препятст
2го не регл

Формал

Гара

Наил

//Чтобы ре

Опр

if д/нее

//Сложно
идет по

$G_2 = m$

условии

т.к. 1ый

min
$x \in X$ $G(x,y$

парабола, max в т. c/2

прибыль
центра

чем продает//

ет у 2го.

ф-ция от y известна=

пает по-разному в
-ти от y//

ер (1ый) сооб-

рает y, сообщ-

f(y)

я:

ии производителя,

продукции

и от кол-ва

политич. игры//

max-т свой

выигрыш.

1ый сообщ. 2му ф-цию f; 2ой — $G(f(y),y)$ — ф-ция перем-й y, эту ф-цию max-т, т.е. выбир. $y \in Y(f) = \operatorname{Arg}\max_{y\in Y} G(f(y),y)$

//Препятствие: разрывная $f(y) \Rightarrow Y(f) = \emptyset \Rightarrow$ поведение 2го не регламентировано $\Rightarrow$ выбирает $\forall y$//

Формализуя: $y \in \tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset, \\ Y, & Y(f) = \emptyset \end{cases}$

↖ ∀ выбор

Гарант. выигрыш 1го: $W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y)$

осторожно, т.к. $Y(f)$ мб не замкнуто

Наилучш. гарант. выигрыш 1го: $F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$

мн-во всех ф-ций

//Чтобы решить Γ_2, надо найти ↗↘//

Опр ∃ $\varepsilon > 0$. Стр. f^ε наз-ся ε-оптим-й, if д/нее $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$ //$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ оптим. стр.//

//Сложность реш-я Γ_2 в том, что оптим-ция идет по мн-ву ф-ций//

$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x,y)$ — maxmin 2го, при условии, что 1ый будет его реально min-ть, т.к. 1ый знает $y \Rightarrow$ в состоянии, чтобы реал-ть $\min_{x \in X} G(x,y)$

Опр Стр. $f^н$: $f^н(y) \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x\in X} G(x,y), \forall y \in Y$ — стр. наказания //1ый минимиз-т 2го//

//If 1ый применяет $f^н$, то max 2го — G_2//

1ый играет тут, max-т себя, дает 2му „подачку"

Мн-во $D = \{(x,y) \mid G(x,y) > G_2\}$

Велич. $K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in D} F(x,y), & D \neq \emptyset, \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$ //или большое число <0//

//1ый оптими- зирует ф-ц по двум перем из непуст. D

//$D = \emptyset$, if $G \equiv const$//

Стр. 1го, L гарантирует получ-е K, мб с точн-тью до $\overset{\to 0}{\varepsilon}, = f_k^\varepsilon$. Найдем пару $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$: $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq \underbrace{K}_{\text{верх. грань}} - \varepsilon$. Она найдется по опр-ю верх. грани.

$$f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & y = y^\varepsilon \\ f^н(y), & y \neq y^\varepsilon \end{cases} \Longrightarrow \underline{W(f_k^\varepsilon) \geq K - \varepsilon}.$$

Почему это так? If 1ый сообщает 2му f_k^ε, то 2ой рассуждает так: if выберет $y = y^\varepsilon$, то в игре реализ-ся пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$: $G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) > G_2$; if выберет $y \neq y^\varepsilon$, то $G(f^н(y), y) = \min\limits_{x\in X} G(x,y) \leq G_2$

G_2-$\max \min\limits_{x\in X}$

т.к. 2и

$x = x^\varepsilon \Longrightarrow$

$\Longrightarrow W(f_k^\varepsilon$

$\Longrightarrow$ стр. н

чем $K-\varepsilon$.

Мн-

мн-во

ответ

$X(y) =$

Опре

кие, что

ко 2му

$X^*(y)$

Стр.

If

$G(f^*(y)$

По

$M =$

$\min_{x\in X} G(x,y), \forall y\in Y$-

з-т 2го//

го — G_2//

$G_2\}$

$D\neq\varnothing$, //1й оптими-зирует ф-ц по двум перем на непуст. D

$D=\varnothing$

<0//

получ-е K,

Найдем

K−ε. Она

верх. грань

ш.

$\geqslant K-\varepsilon$

й сообщает

так: if выбе-

-ся пара

выберет $y\neq y^\varepsilon$,

$\leqslant G_2$

$\min_{x\in X}$

т.к. 2й рациональный, то он выберет

$x = x^\varepsilon \Longrightarrow Y(f_k^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$ max-щий эл-т на стр. f_k^ε $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow W(f_k^\varepsilon) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geqslant K-\varepsilon$ (по опр-ю пары) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ стр. позволяет выиграть не меньше, чем $K-\varepsilon$.//

мн-во maxmin стр. 2го

Мн-во $E = \mathrm{Arg}\max_{y\in Y}\left[\min_{x\in X} F(x,y)\right]$

мн-во наилучш. ответов 1го

$X(y) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X} F(x,y)$

Определим среди наилучш. ответов такие, что они благожелательны по отнош-ю ко 2му

$X^*(y) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X(y)} G(x,y)$

Стр. f^*: $f^*(y)\in X^*(y)$ — спец. ф-ция наилучш. ответа

If такую ф-цию сообщить 2му, то

$G(f^*(y),y) = \max_{x\in X(y)} G(x,y) = W^*(y)$

По Л.2 $W^*(y)$ достигает max на ∀ компакте

$M = \min_{y\in E}\max_{x\in X} F(x,y)$

Определим стр., 2 позволяет гарантировать получ-е велич. $M - f^0_M$:

$$\left[f^0_M(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E, \\ f^н(y), & y \notin E \end{cases} \right]$$ //1ый заставляет 2го выбрать 1ое//

$W(f^0_M) \geq M$. Покажем это.

If 1ый сообщ. 2му такую стр., то как поступает 2й? If $y \in E$, то ему будет обещано $f^*(y)$: $G(f^*(y), y) \geq \min\limits_{x \in X} G(x,y) = G_2$, т.к. y – maxmin стр. If $y \notin E$, то 1ый его наказывает $\Rightarrow G(f^н(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x,y) < G_2$, т.к. y не явл-ся maxmin. Понятно, что нужно выбирать $y \in E$.

Нюанс. $G(f^*(y), y)$ достигает max на E по Л.2 $\Rightarrow \underset{\text{мн-во наилучш. ответов 2го; непустое}}{\mathcal{Y}(f^0_M)} \subset E$ //if бы sup не достигался, то поведение 2го было бы не определено//

$$W(f^0_M) \overset{def}{=} \inf_{y \in \mathcal{Y}(f^0_M) \subset E} \mathcal{F}(f^*(y), y) \geq \min_{y \in E} \mathcal{F}(\underset{\substack{f^*(y)- \\ -\text{max-щая д/1го}}}{f^*(y)}, y) = \min_{y \in E} \max_{x \in X} \mathcal{F}(x,y) = M,$$

ч.т.д. $\Rightarrow$ 1ый в состоянии обеспечить себе выигрыш M.

Т 2.6. (Гермейера о решении $Г_2$) В сделанных предполож-х в игре $Г_2$ наилучш. гарант.

выигрыш

K>M,

If же K

Нюан

преимущ

и он зна

мб доста

Частн

т.е. на паре р

Может о

$\Rightarrow K = \mathcal{F}$

-ый в с

2ой може

что он за

тью, выи

Было

▲ (Док-во

$W(f) \leq \max$

выигрыш $\mathcal{F}_2 = \max[K,M]$, при этом if $K>M$, то д/ $\forall \varepsilon>0$ стр. f_K^ε явл-ся ε-оптим. If же $K<M$, то стр. f_M^0 явл-ся оптим.

Нюанс: в игре Γ_2 1ый имеет двоякое преимущество: он делает 1м ход, сообщ. и он знает y перед выбором $x \Rightarrow \max[K,M]$ мб достаточно большой

Частный случай: $\exists\ (x^0,y^0) \in \operatorname{Argmax}\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \mathcal{F}(x,y)$.

т.е. на паре реализ-ся абс. max $\mathcal{F}$ по двум перем-м//

Может оказаться, что $(x^0,y^0)\in D \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \mathcal{F}(x^0,y^0) = \max\limits_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \mathcal{F}(x,y)$ — абс. max — 1ый в состоянии эту велич. себе обеспечить. 2ой может так эффективно управлять 1м, что он заставляет работать на себя полностью, выигрыш 1го полност. max-ся//

* * *

Было показано, что: $f_K^\varepsilon : W(f_K^\varepsilon) \geq K-\varepsilon$

$f_M^0 : W(f_M^0) \geq M$

▲ (Док-во Т2.6) $\forall\, \overset{\text{стр. 1го}}{\underset{\text{ф-ция ответов}}{f}} \in \{f\}$; док-м, что

$W(f) \leq \max[K,M]$ // $\Rightarrow$ д/ $\forall$ стр. гарант. выигрыш не мб $>$, чем $\max[K,M]$//

1ый сообщает 2му f; 2ий — $G(f(y), y)$ —

— стремится ее max-ть $\Rightarrow \sup\limits_{y\in \mathcal{Y}} G(\underline{f}(y), y) \geqslant$

$\geqslant \max\limits_{y\in\mathcal{Y}} \min\limits_{x\in X} G(x,y) = G_2$

$\sphericalangle$ 2 случая:

1) $\rceil \sup\limits_{y\in\mathcal{Y}} G(f(y), y) > G_2 \Rightarrow \exists\, y^\circ \in \tilde{\mathcal{Y}}(f)$: $(f(y^\circ), y^\circ) \in \mathcal{D}$

а) If $y^\circ \in \overset{\neq\emptyset}{\mathcal{Y}}(f) \Rightarrow$ sup достиг-ся $\Rightarrow$

$\Rightarrow G(f(y^\circ), y^\circ) > G_2 \overset{def}{\Rightarrow} (f(y^\circ), y^\circ) \in \mathcal{D}$

б) $\mathcal{Y}(f) = \emptyset \Rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}(f) = \mathcal{Y} \Rightarrow$ sup не достиг-ся $\Rightarrow$

{опр-е верх. грани} $\Rightarrow G(f(y^\circ), y^\circ) > G_2 \overset{def}{\Rightarrow} (f(y^\circ), y^\circ) \in \mathcal{D}$

гарант. выигрыш 1го $\rightarrow W(f) \overset{def}{=} \inf\limits_{y\in\tilde{\mathcal{Y}}(f)} \mathcal{F}(f(y), y) \leqslant \mathcal{F}(\underbrace{f(y^\circ), y^\circ}_{\in\mathcal{D}}) \leqslant K \leqslant$

$\leqslant \max[K, M]$

2) $\rceil \sup\limits_{y\in\mathcal{Y}} G(f(y), y) = G_2$. // $W(f) \leqslant M$ — док-м //

Тогда $\forall y^\circ \in E \;\; G(f(y^\circ), y^\circ) = G_2$. Док-м это.

y° — maxmin стр. 2го $\Rightarrow \underline{G_2} = \min\limits_{x\in X} G(x, y^\circ) \leqslant$

$\leqslant G(f(y^\circ), y^\circ) \leqslant \sup\limits_{y\in\mathcal{Y}} G(f(y), y) = \underline{G_2} \Rightarrow$ везде

вместо „$\leqslant$" ставим „$=$" $\Rightarrow$ if $y^\circ \in E$, то на нем достиг-ся max $\Rightarrow E \subset \mathcal{Y}(f)$

— игреки, max-щие G при подстановке f

$W(f) \overset{def}{=} \inf\limits_{y\in\mathcal{Y}(f)} \mathcal{F}(f(y), y) \leqslant \min\limits_{y\in E} \max\limits_{x\in X} \mathcal{F}(x, y) = M$ ■

!К/р (11)

Примеры

1. Биматричная игра Γ_2.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \overset{\checkmark}{3} & \overset{\checkmark}{\textcircled{6}}\,{}^{\swarrow 3} & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ \textcircled{7} & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & \textcircled{4} & \textcircled{3} \\ 7 & 7 & \textcircled{3} \\ \textcircled{4} & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$G_2 = \max\limits_{1\leq j\leq 3} \min\limits_{1\leq i\leq 3} b_{ij} = 4$ //фикс. столбец, ищем min-щий эл-т, из них уже ищем max//

$E = \{1, 2\}$ //maxmin стр. 2го, т.е. столбцы, в λ G_2//

$D = \{(i, j) \mid b_{ij} > G_2 = 4\}$ //обведем в B все эл-ты > 4, в $\mathcal{A}$ обведем эл-ты с теми же номерами//

$K = \max\limits_{(i,j)\in D} a_{ij} = 4$ //max среди ○ в $\mathcal{A}$//

$M = \min\limits_{j\in E} \max\limits_{1\leq i\leq 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow \Gamma_2 = 6$

// Т.к. $E = \{1, 2\}$, то берем эти столбцы в A (✓), находим в них max ○, среди ○ ищем min//

в биматр. игре всегда $\exists$, т.к. всё конечно

Оптим. стр.: $f_M^0(j) = \begin{cases} 3, & j = 1 \in E \\ 1, & j = 2 \in E \\ \underset{(\text{либо } 2)}{1}, & j = 3 \notin E \end{cases}$ //$3 \in X(j)$// $= \operatorname{Argmax}\limits_{1\leq i\leq 3} a_i$

//наилучш. ответ (строка) столбца//

↳ наказывает, выбираем min в 3 столбце м-цы B

Проверка (что стр. обещает 2му):

if $j = 1$ выигрыш 4, $j = 2 \to 4$, $j = 3 \to 3$.

Что выбирает 2й? Такие j, где 4 ⇒ гарант. выигрыш будет = 6.

If изменить пример ($\mathcal{A}$: $6 \to 3$), то

G_2, E то же самое, но $M = 3 < K = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow F_2 = 4 \Rightarrow$ СТр: $f_k^0(j) = \overset{(i^0, j^0) = (2,1)}{\begin{cases} 2, & j = 1 \\ 1, & j \neq 1, j = 2 \\ 1, & j = 3, j \neq 1 \end{cases}}$ //1го наказывают min//

$(i^0, j^0) \in \underset{(i,j) \in D}{\mathrm{Argmax}}\, a_{ij} = (2,1); (3,3)$

$\Rightarrow$ 1му игроку обеспечивается 4.

Проверка: 2й выберет $j = 1$, $i = 2 \Rightarrow 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1й получит 4.

<u>Упр</u> $f_k^0(j)$ д/ $(i^0, j^0) = (3,3)$

2. Центр-производитель

$F(x, y) = y(\underset{\downarrow}{C} - x)$ – прибыль 1го (Ц.);

цена на продукцию

цена на рынке

$G(x, y) = (xy - by^2)$ – прибыль 2го (П.);

$x \in X = [0, C]$, $y \geq 0$. //max-ция $y = 0$ – ничего не производит, иначе в "–"// //мин-ция $x = 0$//

$G_2 = \underset{y \geq 0}{\max}\ \underset{0 \leq x \leq C}{\min} (xy - by^2) = 0;$

$E = \{0\}$; $M = \underset{y \in E}{\min}\ \underset{0 \leq x \leq C}{\max} (y(C - x)) = 0$

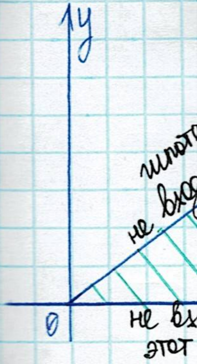
"$\{0\}$

$D = \{(x, y) \mid G(x, y) = xy - by^2 > 0 = G_2\}$

//График на след. стр.//

Т.к. $y > 0 \Rightarrow 0 < y < x/b$

$K =$ ~~max~~ $\underset{0 \leq x \leq C,\ 0 < y < \underbrace{x/b}}{\sup} [y(C - x)] \overset{C - x \geq 0}{\underset{\text{монот-ть по } y}{=}} \underset{0 \leq x \leq C}{\max} \left[\frac{x}{b}(C - x)\right] \overset{\text{как в } \Gamma_1,\ x^0 = C/2}{=} \frac{C^2}{4b}$



$(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = ($

сообщ.

Прои

т.к. бли

близка

пр9ля р

$1 = 3 < K = 4 \Rightarrow$

1)

$= 1$

$\neq 1, j = 2$ //1го наказывает min//

$= 3, j \neq 1$

ется н.

$= 1, i = 2 \Rightarrow 7 \Rightarrow$

ть

2го (У.);

2го ($\overline{Л.}$);

ий $y=0$ – ничего не производит, иначе в «–»//

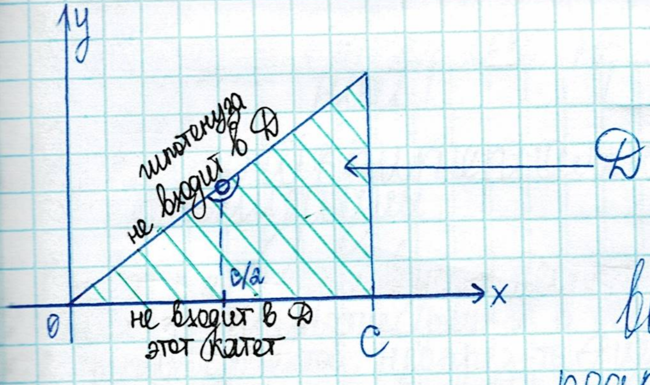
и $x=0$//

$-x)) = 0$

$0 = G_2\}$

как в Γ_1, $x^0 = C/2$

$[\frac{x}{b}(C-x)] \overset{\downarrow}{=} \frac{C^2}{4b}$



//В Γ_2 за счет угроз sup достиг-ся в $x^0 = c/2$//

//Всегда можно выписать $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$, реализующую sup//

$(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (\frac{c}{2}, \frac{c}{2b} - \varepsilon)$ – т. 1го, 2 делает сообщ. $f_k^\varepsilon(y) = \begin{cases} c/2, & y = \frac{c}{2b} - \varepsilon = y^\varepsilon, \\ 0, & y \neq y^\varepsilon \end{cases}$

Произв-ть должен производить y^ε, но т.к. близко к границе, то его прибыль близка к 0 ⇒ перекупщик заставляет пр-тия работать без прибыли

Глава 3. Теория принятия решений

§ $\overset{11}{12}$. Многокритериальная (векторная) оптимизация.

// Глава 1,2 — игры в усл-х неопред-ти //

// Глава 3 — принятие реш-й в усл-х неопред-ти, когда нет других субъектов; неопред-ть — цель принимающего реш-я лица, незафикс., т.е. вместо одного критерия, ℓ необх. max-ть, есть несколько //

ЛПР — лицо, принимающее реш-е.

→ альтернатива/точка/вариант

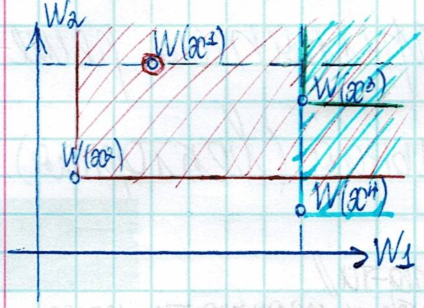
$\exists$ ЛПР выбирает стр. $x \in X$. Оц-ка стр. x векторная — $W(x) = (W_1(x), \ldots, W_s(x))$ — — **вектор-й критерий**, где $W_i(x)$, $i=\overline{1,s}$, — **частный кр-рий**. Будем считать, что ЛПР желательно max-ть каждый частн. кр-рий. // Иногда кр-рий нужно min-ть, но меняя знак, мы max-м //

В этих усл-х треб-ся выбрать $x \in X$.

Проблема: нет такого x_0, ℓ бы max-л все частн. кр-рии, т.е. $\neg\exists\, x^0 \in X : x^0 \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} W_i(x), i=\overline{1,s}$

Пример $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$

$W(x) = (W_1(x), W_2(x))$



$\neg\exists\, x^0 \in X: x^0 \in \operatorname{Argmax}\limits_{x\in X} W_i(x),\ i=\overline{1,S}$

$\operatorname{Argmax}\limits_{x\in X} W_1(x) = \{x^3, x^4\}$

$\operatorname{Argmax}\limits_{x\in X} W_2(x) = \{x^1\}$

Как видим, эти мн-ва не ∩-ся. ⟹

⟹ Проблема: надо определить такую стр., к была бы оптим-й

Опр Стр. $x^0 \in X$ наз-ся оптим-й по Парето, if $\neg\exists\, x \in X: W_i(x) \geq W_i(x^0),\ i=\overline{1,S}$, причем хотя бы одно из этих нер-в явл-ся строгим, т.е. $W(x) \neq W(x^0)$

// Игра 2х лиц — Дилемма заключенного ← уже тут встречали опр-ние //

⅂ $P(X, W)$ — мн-во всех стр. из X, оптим-х по Парето, по критерию W.

В примере выше $P(X,W) = \{x^1, x^3\}$.

∢ x^3: нужно ∢ ортант ▨ и посмотреть, есть ли в нем другие вектор. оц-ки или нет. If их нет, то стр. x^3 оптим. по П.

∢ x^2: ∢ ▨ — там есть другая в-рная оц-ка ⟹

$\operatorname{Argmax}_{x\in X} W_i(x)$, $i=\overline{1,S}$

$) = \{x^3, x^4\}$

$) = \{x^1\}$

е ∩-ся ⟹

ь такую стр.,

ем-й по

$W_i(x^0)$, $i=\overline{1,S}$,

ер-в явл-ся

). ← уже тут встречали опр-ние //

р. из X, оптим-

$= \{x^1, x^3\}$.

посмотреть,

. оц-ки или

м. по П.

в-рная оц-ка=

⟹ x^2 не опт. по П.

x^4 : ∡ ▨ — на границе есть другая в-рная оц-ка ⟹ x^4 не опт. по П.

x^4 : ∡ ⟹ оптим. по П.

Проблема у ЛПР: какую стр. из P(X, W) выбрать? // x^1 или x^3 в нашем случае? //

Опр Стр. $x^0 \in X$ наз-ся оптим-й по Слейтеру, if $\neg\exists\, x \in X: W_i(x) > W_i(x^0), i=\overline{1,S}$

// нельзя улучшить строго по всем частн. критериям //

] S(X, W) — мн-во всех стр. из X по крит. W, оптим-х по Слейтеру.

В нашем примере $S(X, W) = \{x^1, x^3, x^4\}$

Заметим, что $P(X, W) \subset S(X, W)$ // $\overset{\text{из}}{\Rightarrow}$ опр-я //

Оптим-ть по С. можно также опр-ть с помощью сдвинутых ортантов (только теперь смотрим строго внутри!!! на границе — не смотрим!!!) ▨ ▨ ▨

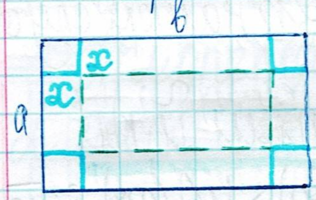
Где встреч-ся зад. многокрит. опт-ции?

Деятельность промышл. предприятий (Сколько производит и какая себестоим-ть)

2) Финансы (финанс. портфель — доходность и риск)

3) Зад. проектирования сложных технич. объектов (самолеты [летно-технич. харак-ки] и т.д.)

Пример (задача проектирования коробки)



$a<b$; материал-металл; дан прямоугольник, из д надо сделать коробку — вырезаем 4 квадрата размером $x\times x$ и сгибаем по пунктир. линиям ⬚ — получ-ся коробка.

В примере x — конструктивный пар-р: $x\in X=\left(0,\frac{a}{2}\right)$

∢ след. критерии: $W_1(x)$ — объем коробки: $W_1(x)=(a-2x)(b-2x)=V(x)$;

$W_2(x)$ — сэконом. мат-л. $W_2(x)=4x^2$ — из этого можно сделать еще коробку; $W_2(x)=S(x)$

(стр.)

Мн-во конструкций, оптим-х по П.: т.к. x одномерно, то построим график

Утв

т.е. $P(X,$

В че

Нужно

$S(X,W$

как п

реш-е:

Задача

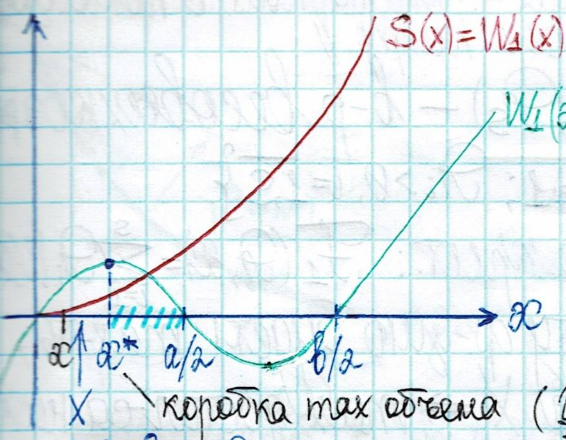
и инф

ев.

Когда

Т.3.1.

$P(X,W) =$



коробка max объема (Упр Продифф. $V(x)$ и найти x^*)

Утв Отр-к ▨ явл-ся страт. оптим. по П., т.е. $P(X,W)=[x^*,\frac{a}{2})$ // If взять $x<x^*$, то, двигаясь вправо, оба критерия возрастают //

В чем состоит зад. многокрит. опт-ции?

Нужно построить (как-то) $P(X,W)$ или $S(X,W)$ или сделать их аппр-цию;

Как помочь ЛПР принять окончат. реш-е: напр., что выбирать из $P(X,W)$?;

Задача сужения мн-в P и S, исходя из инф-ции об относит. важности д/критериев.

Когда $P(X,W)\neq\emptyset$?

Т3.1 $\sqcup$ $W_i(x)$, $i=\overline{1,s}$, непр. на X (компакт метрич. пр-ва). Тогда $P(X,W)\neq\emptyset \overset{P\subset S}{\Longrightarrow} S(X,W)\neq\emptyset$.

▲ // В-рный критерий → скалярный с помощью свертки с некотор. вес. коэф. //

∢ в-р $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_S)$ – в-р весовых коэфф-

$\vartheta \in \Lambda = \{\vartheta \mid \sum_{i=1}^{S} \vartheta_i = 1;\ \vartheta_i > 0,\ i = \overline{1,S}\}$.

∢ свертку вектор. крит.: $F_1(\vartheta, x) = \sum_{i=1}^{S} \vartheta_i W_i(x)$ – скаляр. крит.; эту ф-цию будем max-ть; эта ф-ция непр. на $X \Rightarrow$ max достиг-ся на X.

$\exists\ X_1(\vartheta) = \operatorname{Arg}\max\limits_{X} F_1(\vartheta, x)$, $\forall \vartheta \in \Lambda$ – мн-во стр., к-е max-т свертку F_1 при фикс. ϑ. Д-м, что $X_1(\vartheta) \subset P(X, W)$, $\forall \vartheta \in \Lambda$.

От противного: ⌐$\exists\ x' \in X_1(\vartheta) \setminus P(X, W) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ x \in X$: $W_i(x) \geq W_i(x')$, $i = \overline{1,S}$; $W(x) \neq W(x')$.
Домножим на ϑ_i: $\vartheta_i W_i(x) \geq \vartheta_i W_i(x')$, $\vartheta_i > 0$.
Сложим: $F_1(\vartheta, x) > F_1(\vartheta, x') \Rightarrow \boxed{!?}$, т.к. $x' \in X_1(\vartheta) \Rightarrow$ мы нашли стр. x, к-е дает большее знач-е. ■

25

Верно ли, что $\bigcup\limits_{\vartheta \in \Lambda} X_1(\vartheta) = P(X, W)$? Нет, напр, if X – не вып.

Пример $W(x) = (x_1, x_2)$, $W_1(x) = x_1$, $W_2(x) = x_2$

$F_1(\vartheta, x) = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2$ – свертка

...ый с помощью

...весовых коэфф-

...$\overline{S}\}$.

...$(\vartheta, x) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i W_i(x$

...ем max-ть;

...достиг-ся на X.

...$), \forall \vartheta \in \Lambda$ —

...ку ϑ_1 при

...$P(X,W), \forall \vartheta \in \Lambda$

...$_1(\vartheta) \setminus P(X,W) =$

$W(x) \neq W(x')$.

...$(x'), \vartheta_i > 0$.

...$\vartheta, x') \Rightarrow \boxed{!?}$, т.к.

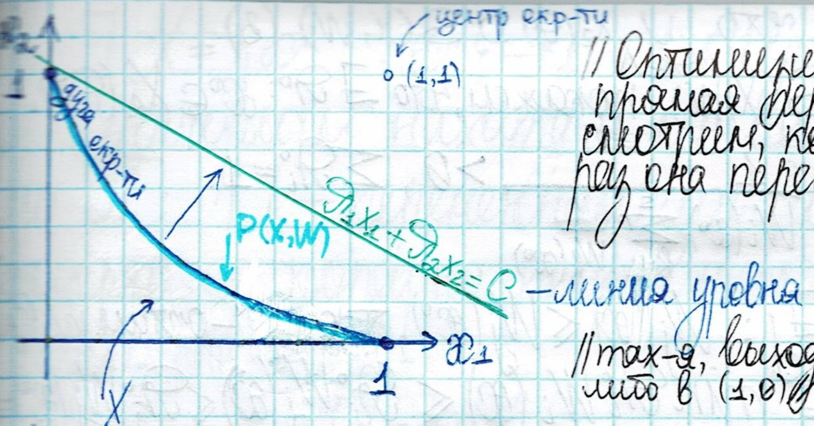
...α дает больше

25

...$,W)$? Нет,

...$x) = x_1, W_2(x) = x_2$

...ка



//Оптимизируя ф-цию, прямая перемещ-ся // себе; смотрим, когда в последний раз она пересек-ся с мн-вом X//

//max-я, выходим либо в т. (0,1), либо в (1,0)//

Видно, что $\bigcup_{\vartheta \in \Lambda} X_1(\vartheta) \subset \{(1,0), (0,1)\}$

//$P(X,W)$ опять строится по ортантам//

$\times$ другую свертку: $F_2(\vartheta, x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant S} \vartheta_i W_i(x)$,

$W_i(x) > 0$, $i = \overline{1,S}$ ← Почему так можно считать без потери общности? Т.к.

Упр If к частн. критериям добавить const, то стр. оптим. по П. и С. не мен-ся, т.е.

$V_i(x) = W_i(x) + \overset{\neq 0}{C_i}, i = \overline{1,S} \Longrightarrow P(X,V) = P(X,W)$

$X_2(\vartheta) = \operatorname{Arg}\max\limits_{X} F_2(\vartheta, x)$

T 3.2. $\exists W_i(x), i = \overline{1,S}$, положит. и непр. на X. — компакт метр. пр-ва

Тогда $\bigcup_{\vartheta \in \Lambda} X_2(\vartheta) = S(X,W)$ (1)

▲ $\forall \vartheta \in \Lambda$ док-м, что $X_2(\vartheta) \subset S(X,W)$.

$\rceil\ \exists x' \in X_2(\vartheta) \setminus S(X,W) \Longrightarrow \exists x \in X : W_i(x) > W_i(x'), i = \overline{1,S}$.

Домножим на $\vartheta_i > 0$: $\vartheta_i W_i(x) > \vartheta_i W_i(x')$.

Берем min от лев. и прав. части: $F_2(\vartheta, x) > F_2(\vartheta, x') \Rightarrow \boxed{!?} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{\vartheta \in \Lambda} X_2(\vartheta) \overset{!}{\subset} S(X,W)$ (2)

Док-м, что $\bigcup\limits_{\vartheta\in\Lambda} X_2(\vartheta) \supset S(X,W)$ (3)

$\forall x_0 \in S(X,W)$ покажем, что $\exists \vartheta^\circ : x^\circ \in X_2(\vartheta^\circ)$.

$$\vartheta^\circ : \vartheta_i^\circ = \frac{1}{W_i(x^\circ)\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{1}{W_k(x^\circ)}} > 0, \ \sum \vartheta_i^\circ = 1.$$

$\forall x \in X \ \exists j : W_j(x) \leqslant W_j(x^\circ)$, т.к. x° – оптим. по С

$$F_2(\vartheta^\circ, x) = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \vartheta_i^\circ W_i(x) \leqslant \vartheta_j^\circ W_j(x) \leqslant \vartheta_j^\circ W_j(x^\circ) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{s}\frac{1}{W_k(x^\circ)}} = \min_{1\leqslant i\leqslant s} \vartheta_i^\circ W_i(x^\circ) = F_2(\vartheta^\circ; x^\circ),$$ т.е.

$\forall x \in X$ max F_2 достиг-ся на x° при задан. ϑ°. ■

26

19/10

эквив. с прошл. лекцией

$S(X,W) \leftarrow$ мн-ва $\rightarrow P(X,W)$

$\exists$ есть 2 стр. x и $x' \in X$.

Опр Будем говорить, что стр. x лучше x' по Парето (в смысле П.) (по в-рному крит.), if

$W_i(x) \geqslant W_i(x')$, $i = \overline{1,s}$, причем $W(x) \neq W(x')$

Обозн $x \geqslant x'$ //это бинарное отнош-е ⇒ оно транзит.// //неулучш. в смысле 1го бинар. отнош-я

Опр Будем говорить, что стр. x лучше x' строго по вектор. крит. (по Слейтеру), if

$W_i(x) > W_i(x')$, $i = \overline{1,s}$. //неулучш. в смысле 2го бинар. отнош-я//

Обозн $x > x'$

(3)

$: x^0 \in X_\vartheta(\vartheta^0)$.

$= 1$.

x^0 — оптим. по Сл

$(x) \leqslant \vartheta_j^0 W_j(x^0) =$

$(\vartheta^0; x^0)$, т.е.

x^0 при задан.

26

стр. x лучше

$)$, if

$W(x) \neq W(x')$

и-е ⇒ оно транзит. //

о бинар. отнош-я

стр. x лучш

if

улучш. в смысле

о бинар. отнош-я //

] $X = \{x^1, \dots, x^n\}$ — конечн. мн-во стр.

Алгоритм нахожд-я мн-ва стр., оптим-х по Π: Π — переменная мн-ва, в к содержатся попарно несравнимые стр. в смысле $\geqslant$.

Шаг 1.] $\Pi = \{x^1\}$

. . .

Шаг k. Π

Шаг k+1. Берем стр. x^{k+1} и сравниваем с другими стр. попарно из Π

а) $\exists\, x' \in \Pi : x' \geqslant \overbrace{x^{k+1}}^{\text{отбрасываем}} \Longrightarrow$ переходим к след. шагу

б) $\exists\, x' \in \Pi : x^{k+1} \geqslant x' \Longrightarrow \Pi'$ (без x') $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Pi := \Pi' \cup \{x^{k+1}\} \xrightarrow{\text{отбрасываем}}$ след. шаг

// If $\exists\, x \in \Pi' : x \geqslant x^{k+1} \geqslant x' \Longrightarrow x \geqslant x' \Longrightarrow$ ⓘ!? //

в) x^{k+1} несравнима с никакими стр. из $\Pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Pi := \Pi \cup \{x^{k+1}\} \Longrightarrow$ след. шаг

После n шагов: $\Pi = P(X, W)$ Упр

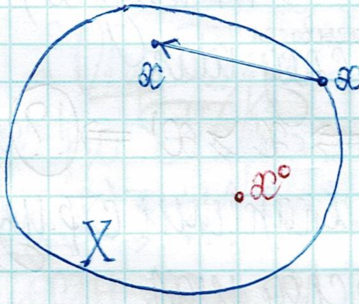
Почему так? Потому что перебрали все возможные вар-ты и отобрали несравнимые (не улучшаемые) ⇒ оптим по П.

Аналогич. алгоритм д/ мн-ва стр., оптим-х по Сл: отличие только в знаке — $>$ вместо $\geqslant$.

] X – мн-во в евклид. пр-ве с ограничениями вида рав-в и нерав-в (как правило, вып.).] также все частн. критерии, определен. на X, явл-ся вогнут. Тогда $S(X, W)$ (или $P(X, W)$) удается задать в виде огранич-й вида рав-в/нерав-в.

] ($X^{\in E^m}$ – вып. компакт в евклид. пр-ве, $x^\circ \in X^{\in E^m}$ – некот. т. мн-ва.

Опр Будем говорить, что в-р $\alpha \in E^m$ задает в т. x° допустимое (возможное) направление, if $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall\, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Longrightarrow x^\circ + \varepsilon\alpha \in X$



$\alpha = x - x^\circ$ ←

Покажем, что это – допустим. направл.

Т.к. X вып., то (по опр.)

$\varepsilon x + (1-\varepsilon)x^\circ \in X$, if $0 < \varepsilon \leq 1$;

$x_0 + \varepsilon\underbrace{(X - X^\circ)}_{=\alpha} \in X$, то при $\varepsilon_0 = 1$

по опр., α – допустим. направл.

// If x° – внутр. т. вып. мн-ва X (т.е. есть окр-ть, $\mathcal{L}$ целиком содерж-ся в X), то $\forall$ направл. допустим.

Обозн $\mathcal{L}(x^\circ)$ – мн-во всех направл-ий, допустимых в т. x°

-ве с ограни-
ерав-в (как
все частн.
авл-ся вогнут.
) удается задать
в-в/нерав-в.
клид. пр-ве,

р $\alpha \in E^m$ задает
ое) направление,
$\varepsilon\alpha \in X$

сто это — допустим.

., то (по опр.)
$^\circ \in X$, if $0<\varepsilon\leq 1$;
$\in X$, то при $\varepsilon_0=1$
л.
X (т.е. есть окр-ть,
направл. допустим
х направл-и,
т. x°

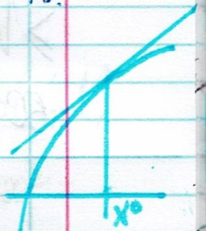
Т3.3. ∃ $W_i(x)$, $i=\overline{1,S}$, вогнуты на вып. компакте
(т.е. есть непр. частн. произв.)
X евклид. пр-ва и непр. дифф. в некот. обл-ти
Ω: $X \subset \Omega$. Тогда $x^\circ \notin S(X,W) \iff \exists\, \alpha \in \mathcal{L}(x^\circ)$:
— произв. по направл. α
$(W_i'(x_0), \alpha) > 0$, $i=1,S$ (1)
└ градиент ф-ции в т. x_0

Упр Сформул-ть необх. и дост. усл-е $x^\circ \in S(X,W)$
(надо написать отрицание (1))

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ ∃ $x^\circ \notin S(X,W) \overset{?}{\Longrightarrow}$ (1)

Тогда $\exists\, x \in X: W_i(x) > W_i(x^\circ)$, $i=\overline{1,S}$. Т.к. все W_i вогн. и непр. дифф., то

$$(W_i'(x^\circ), x-x^\circ) \geqslant \underbrace{W_i(x)-W_i(x^\circ)}_{>0}, \ i=\overline{1,S}$$



$\alpha = x-x^\circ$ — допуст. напр. $\Rightarrow$ (1) вып-но.

$\boxed{\Leftarrow}$ ∃ д/ $x^\circ_{\in X}$ вып-но (1) $\overset{?}{\Longrightarrow} x^\circ \notin S(X,W)$

Тогда $\exists\, \varepsilon_0 > 0: \forall\, 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0 \Rightarrow x^\circ+\varepsilon\alpha \in X$ (по опр.)

$W_i(x^\circ+\varepsilon\alpha) - W_i(x^\circ) = \{$ф-ла конечн. приращ. Лагр.$\} =$

$= (W_i'(x^\circ+\theta_i\varepsilon\alpha), \varepsilon\alpha) = \varepsilon(W_i'(x^\circ+\theta_i\varepsilon\alpha),\alpha) \Rightarrow$
$\hookrightarrow 0<\theta_i<1$

$\Rightarrow \{\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}; (W_i'(x^\circ+\theta_i\varepsilon\alpha),\alpha) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} (W_i'(x^\circ),\alpha) \underset{\text{по усл. (1)}}{>} 0, i=\overline{1,S}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon(\underbrace{W_i'(x^\circ+\theta_i\varepsilon\alpha),\alpha}_{>0}) > 0$, $i=\overline{1,S} \Longrightarrow x^\circ+\varepsilon\alpha \succ x^\circ$ ■

Частный случай: P и S совпадают.

∃ X – вып. компакт; $W_i(x)$, $i=\overline{1,S}$, строго вогн. на X.

Покажем, что $P(X,W) = S(X,W)$

Известно, что $P(X,W) \subset S(X,W)$ (из опр.)

Д-м, что строгого включ-я не м.б. От противного: $\exists\, x' \in S(X,W) \setminus P(X,W) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\, x \in X: W_i(x) \geqslant W_i(x'),\ i=\overline{1,S}$, причем $W(x) \neq W(x') \Longrightarrow x \neq x'$.

$\geqslant W_i(x')$

$\measuredangle\ \frac{x+x'}{2} \in X \Longrightarrow W_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) > \frac{1}{2}W_i(x) + \frac{1}{2}W_i(x') \geqslant W_i(x'),\ i=\overline{1,S} \Longrightarrow \frac{x+x'}{2} > x' \Longrightarrow$ (!?), т.к. $x' \in S(X,W)$.

28

Пример

$\measuredangle$ на пл-ти точки $x^i,\ i=\overline{1,S}$.

Задача: возьмем т. x; $W_i(x) = -|x - x^i|,\ i=\overline{1,S}$. Указать мн-во стр., оптим-х, напр., по Сл.

//Смысл: города на мест-ти x^i; надо возвести объект x, к-й будут исп-ть все города, так, чтобы к каждому городу он был как больше ближе//

W)

S(X, W) (из опр.)

не лб. От про

(X,W) $\Longrightarrow$

$), i=\overline{1,S}$, присем

$\Rightarrow W_i(x')$

$') > \frac{1}{2}W_i(x) + \frac{1}{2}W_i(x$

$\Longrightarrow$ (!?), т.к.

28

$\cdot x^2$

S.

$x) = -|x - x^i|, i=\overline{1,S},$

x, напр., по Сл.

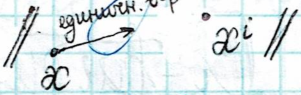
надо возвести

города, так,

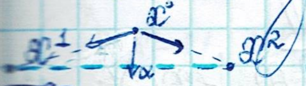
ел как больше

В произвол. т. x посчитаем grad

$$W_i'(x) = -\frac{(x - x^i)}{|x - x^i|} = \frac{x^i - x}{|x - x^i|}$$

//  //

Решим зад. д/двух точек — x^1 и x^2.

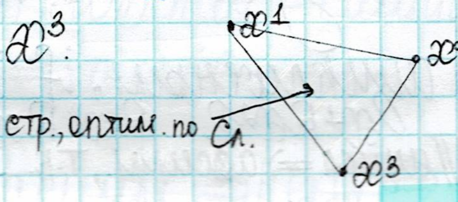


Явл-ся ли x^0 опт-й по Сл.?

Посчитаем grad каждого частн. критерия $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ получим 2 единичн. в-ра, 2 направлены в сторону x^1 и x^2. Когда $x^0 \notin S(X,W)$? Когда $\exists \overset{напр.}{\alpha}$, 2 образует острые углы.

Ив if $x^0 \in$ отр-ку $[x^1, x^2]$, то $x^0 \in S(X,W)$.

Упр Зад. д/ x^1, x^2, x^3.



§13. Общая задача принятия решений

ЛПР должно выбрать стр. $x \in X$, при этом стр. сравниваются не с помощью в-рного критерия, а бинар. отнош-я.

Опр Бинар. отнош-м R на мн-ве X наз-ся п/мн-во $X \times X$, т.е. $R \subset X \times X$. При этом, if $(x, x') \in R$, то стр. x лучше (не хуже) стр. x'. Обозн: xRx'.

If же $(x,x')\notin R$, то $x\overline{R}x'$.

(Св-ва) Опр Бин. отн. R на мн-ве X наз-ся:

а) рефлексивным, if xRx, $\forall x\in X$;

//$\forall$ стр. не хуже себя; пример: $\geqslant$ //

б) антирефлексивным, if $x\overline{R}x$, $\forall x\in X$;

//при строгом сравнении; пример: $>$ //

в) симметричным, if $xRy \Rightarrow yRx$, $\forall x,y\in X$;

// пример: $=$ //

г) асимметричным, if $xRy \Rightarrow y\overline{R}x$, $\forall x,y\in X$;

//асимм $\Rightarrow$ антирефл., т.к. $\exists x: xRx \Rightarrow x\overline{R}x \Rightarrow$ (!?) //

д) транзитивным, if $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$, $\forall x,y,z\in X$;

е) ацикличным, if $\neg\exists\ x^1,\dots,x^k\in X$: $x^1Rx^2R\dots Rx^kRx^1$

//ацикл $\Rightarrow$ асимм., т.к. $\exists x,y: xRyRx$//

Пример $\geqslant$ – транз. + асимм.

$>$ – транз. + асимм.

Упр] R антирефл. и транз. $\Rightarrow R$ ацикл.
(от противного)

МПР необх. выбрать стр. $x\in X$, сравнение осущ-ся бин. отн. R. Какие стр. будут оптим-ны?

Опр Ядром бин. отн. R на мн-ве X наз-ся

$\bar{R}x'$!

X наз-ся:

, $\forall x \in X$;

//

$x, \forall x \in X$;

> //

$\Rightarrow yRx, \forall x,y \in X$;

$\Rightarrow y\bar{R}x, \forall x,y \in X$;

$\Rightarrow x\bar{R}x \Rightarrow$ (!?) //

$z \Rightarrow xRz,$
$\forall x,y,z \in X$;

$^k \in X$:

Rx //

м.

м.

$\Rightarrow R$ ацикл.

. $x \in X$, сравне-

кие стр. будут

мн-ве X наз-ся

мн-во $C(X,R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\}$ (1)

//If стр. x не хуже x', то x' не хуже x//

] R-асимм., то $C(X,R) = \{x' \in X \mid \exists x \in X : xRx'\}$

//напоминает стр. по П./С.// (2)

Док-м, что д/асимм. бин. отн. мн-ва (1) и (2) совпадают.] $x' \in (1) \overset{?}{\Rightarrow} x' \in (2)$. От противного! $x' \notin (2) \Rightarrow \exists x \in X : xRx' \xrightarrow{R\text{ асимм.}} x'\bar{R}x$

$\Downarrow^{(1)}\ x'Rx$ $\Big\} \Rightarrow$ (!?) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (1) \subset (2)$

] $x' \in (2) \overset{?}{\Rightarrow} x' \in (1)$. Тогда $\neg\exists\, xRx' \Rightarrow$ $\Rightarrow$ посылка xRx' в (1) ложная $\Rightarrow$ импликация в (1) вып-на $\Rightarrow x' \in (1)$

29

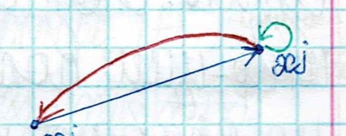
Пример $R = \succcurlyeq$ — асимм $\Rightarrow \{(2)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(X, R = \succcurlyeq) = P(X,W)$ //в (2) $R = \succcurlyeq$//

$R = \succ \Rightarrow C(X, \succ) = S(X,W)$

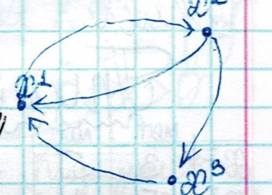
Пример $X = \{x^1, \dots, x^n\}$

$x^i R x^j \Rightarrow$ стрелочка → x^i
(ориентир. граф)



Пример] $X = \{x^1, x^2, x^3\}$

$C(X,R) = ?$ //не асимм., т.к. $x^1 R x^2 R x^1$//
$\Rightarrow$ опр-е (1)



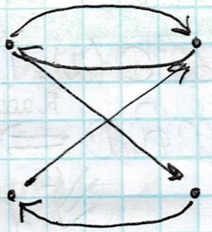
x^3 лучше x^1, но не наоборот $\Rightarrow x^1 \notin C(X,R)$

x^1 не хуже x^2, но и наоборот $\Rightarrow x^2 \in C(X,R)$

x^2 не хуже x^3, но не наоборот $\Rightarrow X^3 \notin C(X,R)$

Ответ: $C(X,R) = \{x^2\}$

Упр



$C(X,R) = ?$

1 Мб зад.

Утв ∃ X-конечное, R-ацикличн. Тогда $\overline{C(X,R) \neq \emptyset}$

Упр Д-ть. $\left(\text{If } \cdot x^1 \leftarrow \cdot x^2 \nwarrow \cdot x^3 \quad \text{цикл} \Leftarrow \right)$

Как можно исп-ть зад. общего принятия реш-я д/ сужения Мн-ва стр., оптим-х по П.? ∃ X-конечно, построили $P(X,W)$, но оно содержит много точек ⇒ его надо сузить. Оказ-ся, его можно сузить на основе инф-ции, получаемой от $\tilde{\text{Л}}$ПР — относительно сравнит. важности/равноценности критериев.

Пример ∃ 2 ученика учатся в школе:

	мат.	лит.
x^1	3	5
x^2	5	4

⇒ в-рный крит-ей разм-ти 2

⇒ не сравнимы в смысле П. (из-за 5),

но можно

сравнит.

1) ∃ м

оим чи

$x^2 \sim x^3$

$x^3 \geq x^1$

лучше,

2) ∃ м

Добавляя

$\Rightarrow x^2$ л

3) ∃ б

⇒ цепоч

а у x^1

$W_i(x)$

Опр

$\max\limits_{x \in X} W_i(x)$

Неодн

$W_i(x)$, но

Упр Явн

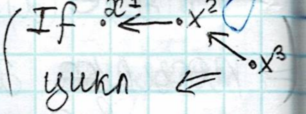
$\Rightarrow x^1 \notin C(X,R)$

$\Rightarrow x^2 \in C(X,R)$

$\Rightarrow X^3 \notin C(X,R)$

?

ецикпич. Тогда



общего приня-

а стр., оптим-х

пошли P(X,W),

$\Rightarrow$ его надо

ить на основе

P — относитель

ценности кри-

ается в школе

ам-ти 2

ьше П. (из-за 5),

но можно сравнить, if есть доп. инф-ция о авнит. важ-ти/равноцен-ти предмета

1) ∃ мат-ка равноценна лит-ре. Добавим гипотетич. ученика: x^3 / н / 5. Тогда $x^2 \sim x^3$ (учится так же, как x^3), а $x^3 \geqslant x^1$, т.е. $x^2 \sim x^3 \geqslant x^1$. $\Longrightarrow x^2$ учится лучше, чем x^1.

2) ∃ мат-ка более важна, чем лит-ра. Добавляя того же ученика $x^3 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x^2$ лучше $x^3 \geqslant x^1 \Longrightarrow x^2$ лучше x^1

3) ∃ лит-ра более важна, чем мат-ка $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ цепочку выстроить нельзя (x^3 лучше x^2, а у x^1 оц-ка по лит-ре 5)

$W_i(x)$, $i=\overline{1,S}$.

Опр $W_i(x)$ и $W_j(x)$ однородны, if //одинак. диапазоны изм-ния//

$\max\limits_{x\in X} W_i(x) = \max\limits_{x\in X} W_j(x)$, $\min\limits_{X} W_i(x) = \min\limits_{X} W_i(x)$.

Неоднород. критерии сводятся к однород.: $W_i(x)$, но вместо $W_j(x)$ $\star$ $\underline{\alpha W_j(x)+\beta}$, $\alpha>0$

Упр Явно выписать ф-лы д/ α и β (подставить в рав-ва опр-я)

В дальнейшем считаем, что все частн. критерии попарно однородны

Формализуем инф-цию $\overset{\text{от ЛПР}}{}$ о сравнит. важности/равноценности критериев. Эта инф-ция задается с помощью 2х бин. отн.

Есть мн-во $\overset{\text{номеров}}{}$ критериев $I=\{1,\dots,s\}$, на I задаем бин. отн.

Отн. $\mathcal{A}_1$ – $\overset{\text{отн. равноценности критериев}}{}$: if номера критериев $\overset{r \text{ и } t}{}$ связаны отн. $\mathcal{A}_1$, т.е. $r\mathcal{A}_1 t$, то $W_r(x)$, $W_t(x)$ равноценны //уже однородны//

Св-ва $\mathcal{A}_1$: рефл., транз., симм.

Отн. $\mathcal{A}_2$ – отн. сравнит. важности: if номера крит. r и t связаны отн. $\mathcal{A}_2$, т.е. $r\mathcal{A}_2 t$, то $W_r(x)$ важнее $W_t(x)$

Св-ва $\mathcal{A}_2$: ~~антирефл.~~ (из асимм.), транз., асимм.

Главное, чтобы не было цепочек вида $1\mathcal{A}_1 \underbrace{2\mathcal{A}_2 3}_{\text{нd}} \mathcal{A}_1 1$. Д/ этого определим бин. отн. $\underset{\sim}{\Phi}$ на мн-ве I – транзит. замыкание отн-й $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$: $r\Phi t$, if

то все частн.
ны

сравнит. важ-
ериев. Эта
о 2х бин. отн.
$= \{1, \dots, s\}$, на
риев r и t
ериев связаны
), $W_t(x)$ равно

, симм.
ажности: if
отн. $\mathcal{A}_2$, т.е.
x)
з., асимм.
почек вида
еделим бин. отн.
I – транзит.
$r\Phi t$, if

∃ цепочка вида $rB_1 i_1 B_2 \dots B_k t$, где B_l, $l = \overline{1,k}$, это либо $\mathcal{A}_1$, либо $\mathcal{A}_2$, а $i_1, i_2, \dots$ — это номера критериев; причем в этой цепочке встреч-ся хотя бы одно отн. вида $\mathcal{A}_2$.

Усл-е непротиворечивости: Φ явл-ся антирефл. $\Rightarrow t\overline{\Phi}t, \forall t$

Перейдем в пр-во в-рных оценок.

$\angle$ E^s — евклид. пр-во, ℓ принадлежат в-рные оц-ки $y = W(x) \in Y = W(X)$ //будем $\angle$ в-рные оц-ки не только из Y, но и вне Y//

образ мн-ва стр. x при в-рном отобр. W

Бин. отн. определим на всем E^s.

1) Бин. отн. P — бин. отн. сравнения по П:

//раньше сравнивали стр., а теперь — в-рные оц-ки//

$yPy' \Leftrightarrow y_i \geq y'_i, i = \overline{1,s}; y \neq y'$

2)] $r\mathcal{A}_1 t$. Определим в E^s бин. отн. S_{rt}.

If есть вект. оц-ка $y \in E^s$ и пара $r \neq t$, то y^{rt} — в-рная оц-ка y, в ℓ r и t компоненты поменялись местами. //$y = (4,5)$, $y^{12} = (5,4)$//.

S_{rt} — бин. отн. равноценности в-рных оц-к:

$yS_{rt}y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}$, причем $r\mathcal{A}_1 t$.

3)] $r\mathcal{A}_2 t$. Определим в E^s бин. отн. T_{rt}:

строгого сравнения

$y\,T_{rt}\,y' \iff y' = y^{rt},\ y_r > y_t$ //y лучше y'//

транз. замыкание пред. отн-ний

//$y = (4,5),\ y^{21} = (5,4)$// $\xrightarrow{}$ лучше

4) Бин. отн. R: $y R y' \iff \exists$ цепочка $y H_1 z^1 H_2 z^2 \ldots z^{k-1} H_k y'$, где $z^1, \ldots, z^{k-1}$ – в-ры оц-ки размер-ти s; $H_i, i=\overline{1,k}$, – бин. отн-я: $H_i \in \{P, S_{rt}: r\mathcal{A}_1 t, T_{rt}: r\mathcal{A}_2 t\}$; при этом среди H_i найдется хотя бы одно отнош. строгого предпочтения, т.е. $\exists H_l = P$ или T_{rt}.

Лемма 1. Бин. отн. R транз. и ацикл.

▲ 1) $\underbrace{y R y'}_{\exists \text{ цепочка}} R y'' \overset{?}{\Longrightarrow} y R y''$ //Д-м транз.//

цепочку можно продолжить $\Rightarrow$ объединяя цепочки, приходим к нужному

2) //Д-м ацикл.//] R не ацикл. $\Rightarrow$ можно построить цикл $y H_1 z^1 H_2 z^2 \ldots z^{k-1} H_k y$.

а) $\exists l: H_l = P \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} z_i^{l-1} > \sum_{i=1}^{s} z_i^{l}$

$\Downarrow z^{l-1} P z^l$

$\exists l: H_l = T_{rt}$ или $S_{rt} \Rightarrow$ суммы совпадают, т

$\sum_{i=1}^{s} z_i^{l-1} = \sum_{i=1}^{s} z_i^{l}$

Тогда $\underline{\sum_{i=1}^{s} y_i} \geqslant \sum_{i=1}^{s} z_i^1 \geqslant \ldots > \ldots \geqslant \underline{\sum_{i=1}^{s} y_i} \Rightarrow$ ⓘ!?

б) Среди H_i нет P: $\forall i\ H_i \neq P \Rightarrow H_l = T_{rt}$

лучше y'//

(4,5), $y^{21} = (5,4)$//

лучше

почка

..., z^{k-1} — в-рны

— бин. отн-я:

}; при этом

но отнош.

$= P$ или T_{rt}.

нз. и ацикл.

анз.//

цепочке, приходим

л. $\Rightarrow$ можно

$z^{k-1} H_k y$.

ны совпадают, т

$\Rightarrow$ (!?)

$P \Rightarrow H_\ell = T_{rt}$

Т.к. у нас цикл, то без потери общ-ти,

$H_1 = T_{rt} \xRightarrow{\text{следующие}} H_\ell = S_{i_\ell j_\ell}$ либо $T_{i_\ell j_\ell}$ — i лучше t через цепочку

Определим спец. мн-во $I_+ = \{i \mid i \Phi t\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r \in I_+$, т.к. $T_{rt} \Rightarrow r A_2 t \Rightarrow r \Phi t$; но

$t \notin I_+$, т.к. было бы $t \Phi t$, что невозможно. → антирефл.

Вернемся к H_ℓ:] $j_\ell \in I_+ \overset{?}{\Rightarrow} i_\ell \in I_+$.

If $i_\ell \underset{(A_2)}{A_1} \underbrace{j_\ell \Phi t}_{j_\ell \in I_+} \Rightarrow i_\ell \Phi t \Rightarrow i_\ell \in I_+$.

Возможны случаи:

1] $i_\ell, j_\ell \in I_+$

2] $i_\ell, j_\ell \notin I_+$

} //Они связаны либо A_1, либо $A_2 \Rightarrow$ там есть отнош-я S_{rt} или T_{rt}// $H_\ell = S_{i_\ell j_\ell}$ или $T_{i_\ell j_\ell} \Rightarrow z^{\ell-1} H_\ell z^\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{\ell-1} = \sum_{i \in I_+} z_i^\ell$

3] $i_\ell \in I_+, j_\ell \notin I_+$ $\boxed{\Rightarrow}$

4] ~~$j_\ell \in I_+, i_\ell \notin I_+$~~ → невозможно

$\boxed{\Rightarrow}$ $i_\ell A_2 j_\ell$, т.к. if $i_\ell A_1 j_\ell$, то $j_\ell A_1 i_\ell \Phi t \Rightarrow j_\ell \in I_+ \Rightarrow$ (!?)

Тогда $H_\ell = T_{i_\ell j_\ell} \xRightarrow{\text{опр.}} z_{i_\ell}^{\ell-1} > z_{j_\ell}^{\ell-1} \Rightarrow \sum_{i \in I_+} z_i^{\ell-1} > \sum_{i \in I_+} z_i^\ell$

$\underline{\sum_{i \in I_+} y_i} > \sum_{i \in I_+} z_i^1 \geqslant \ldots \geqslant \underline{\sum_{i \in I_+} y_i} \Rightarrow$ (!?) ■

зо заканч-ся на след. стр. !!!

Постановка зад. сужения стр-й, оптим-х Парето.

] $P(X, W) = \{x^1, \ldots, x^n\}$ — конечное мн-во. Соотв. мн-во в-рных оц-к $P(Y) = \{y^1 = W(x^1), \ldots, y^n = W(x^n)\}$. Сужая $P(X, W) \Rightarrow$ сужаем $P(Y)$.

Зад. сужения: построить $C(P(Y), R)$

Т.к. R ацикл., то $C(P(Y), R) \neq \varnothing$ (по Упр)

Проблема: if есть 2 в-рные оц-ки y и y', то связаны они бин. отн. R или нет? (надо строить цепочки...)

В частн. случаях yRy' упрощ-ся (т.е. не $\nleftarrow$-ся цепочки).

Предположим, что все частн. крит. равноценны, т.е. $\Omega_1 = I \times I$, $\Omega_2 = \varnothing$.

$\exists\, y \in E^s$. Определим новую в-рную упорядоч. оц-ку $\theta(y) = (\theta_1(y), \dots, \theta_s(y))$, где $\theta_1(y) \geq \dots \geq \theta_s(y)$

Лемма 2. $\exists\, yPy' \Rightarrow \theta(y)\, P\, \theta(y')$

▲ $\theta_1(y) = \max\limits_{1 \leq i \leq s} y_i \geq \max\limits_{1 \leq i \leq s} y'_i$ (т.к. $P \Rightarrow y_i \geq y'_i, i=\overline{1,s}$) $= \theta_1(y')$

наиб. по опр.

Д-м, что $\theta_i(y) \geq \theta_i(y'), i=\overline{1,s} \Longrightarrow \theta(y) \neq \theta(y$

$\neg \exists\, k:\ \theta_k(y) < \theta_k(y')$

//т.к. компоненты в упорядочены//

$$\underbrace{\underset{\substack{\vee\!\!\!\mid \\ y'_{is}}}{\theta_s(y)} \leq \dots \leq \underset{\substack{\vee\!\!\!\mid \\ y'_{ik}}}{\theta_k(y)}}_{s-k+1 \text{ компонент}} < \underbrace{\theta_k(y') \leq \theta_{k-1}(y') \leq \dots \leq \theta_1(y')}_{k \text{ компонент}}$$

$\Longrightarrow s-k+1+k = s\boxed{+1}$!? компонента $\Longrightarrow$ (!?) ■

ь $C(P(Y), R)$

$P(Y), R) \neq \emptyset$

(по Упр)

онные оц-ки

ен. отн. R или

и...)

$'$ упрощ-ся

стн. крит. равно-

$= \emptyset$.

овую в-рную

где $\theta_1(y) \geq \ldots \geq \theta_s(y)$

$P\,\theta(y')$

к.. $P \Rightarrow y_i \geq y'_i, i=\overline{1,s})$

(y')

$\overline{1,s} \Rightarrow \theta(y) \neq \theta(y$

$\underbrace{\theta_{k-1}(y') < \ldots < \theta_1(y'}_{k \text{ компонент}}$

$k+1+k = s\textcircled{+1}$?!

понента $\Rightarrow$ (!?) ■

Утв If $\Omega_1 = I \times I$, то $yRy' \Leftrightarrow \theta(y) P \theta(y')$

$\boxed{\Rightarrow}$ $yRy' \Rightarrow \exists$ цепочка $yH_1z^1H_2\ldots H_ky'$, где $H_i \neq T_{rt}, i=\overline{1,k} \Rightarrow \exists\, l: H_l = P$. Выведем из цепочки $\theta(y) P \theta(y')$.

If $H_l = S_{i_lj_l} \Rightarrow z^{l-1}$ и z^l имеют одинаковые компонента i_l и j_l, переставленные местами. $\Rightarrow \theta(z^{l-1}) = \theta(z^l)$.

If $H_l = P \Rightarrow z^{l-1} P z^l \Rightarrow \{\underline{\Lambda 2}\} \Rightarrow \theta(z^{l-1}) P \theta(z^l)$ $\Rightarrow$, двигаясь вдоль цепочки, $\theta(y) P \theta(y')$ в силу транзитивности

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists$ $\theta(y) P \theta(y') \overset{?}{\Longrightarrow} yRy'$.

$yS_{i_1j_1}\ldots S_{i_kj_k}\theta(y)$ //переставляя пары, получаем из $y \to \theta(y')$//

//всё также переставляя...//

$yS_{i_1j_1}\ldots S_{i_kj_k}\theta(y) P \theta(y') S_{i_{k+1}j_{k+1}}\ldots y' \Rightarrow$

$\Rightarrow yRy'$. ■

31

Пример $\exists$ все частн. критерии равнозначны,

в-рные критерии: $y^1 = (3,5,3)$, //они соотв. стр. оптим-м по П.//

Зад: построить ядро бин. отн.

$y^2 = (4,4,3)$,

$y^3 = (5,3,2)$,

$y^4 = (2,3,5)$; $y^5 = (4,2,4)$.

$$\left.\begin{aligned}\theta(y^1) &= (5, 3, 3)\\ \theta(y^2) &= (4, 4, 3)\\ \theta(y^3) &= (5, 3, 2)\\ \theta(y^4) &= (5, 3, 2)\\ \theta(y^5) &= (4, 4, 2)\end{aligned}\right\}$$ Сравним по П. ⇒

$$\left.\begin{aligned}&\theta(y^1)\ P\ \theta(y^3),\ \theta(y^4)\\ \Rightarrow\ &\theta(y^2)\ P\ \theta(y^5)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ выбрасываем $\theta(y^3), \theta(y^4), \theta(y^5)$

$\theta(y^1)$ и $\theta(y^2)$ не сравнимы по П $\Rightarrow$

$\Rightarrow C(P(Y), R) = \{y^1, y^2\}$

Пример $\exists\ P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$.

$y^1 = (5, \underline{5}, \underline{4}, \underline{4}),$ //4 ученика, 4 предмета; как-то надо выделить лучшего//

$y^2 = (5, \underline{4}, \underline{5}, 4),$

$y^3 = (5, \underline{4}, \underline{4}, \underline{5}),$

$y^4 = (4, 4, \underline{5}, 5)$

$$\Omega_1 = \{(1, \underline{3}), (\underline{3}, 1)\} \cup \overbrace{\{(i, i),\ i = \overline{1, 4}\}}^{\text{рефлекс.}}$$

$\Omega_2 = \{(\underline{2}, \underline{4}), (\underline{2}, \underline{3})\}$ //2 пр. важнее 4 и 3//

Сравним по R.

$y^1\ \Pi_{\underline{24}}\ y^3 \Rightarrow y^1 R y^3$

$y^1\ \Pi_{\underline{23}}\ y^2 \Rightarrow y^1 R y^2$ ↖ //Аналогично//

П. ⇒

ваем"

$(y^4), \Theta(y^5)$

бо П ⇒

$x^2, x^3, x^4\}.$

дмета; как-то

чшего//

н}

и 3//

о//

$y^2 T_{24} y^3 S_{13} y^4 \Rightarrow y^1 R y^4$

$Cl(P(Y), R) = \{y^1\}$ //⇒ 1й ученик лучший//

§15. Мат. модель операций

Операция — совокуп-ть меропр-тий, направл-х на достиж-е некотор. цели.

Оперирующая сторона — совокупность или одно лицо, ℓ стремятся в операции к поставленной цели

Исследователь операции (внутри опер. стор.) — часть оперирующ. стороны, задача ℓ заключ-ся в том, что он создает мат. модель операции, исследует ее и выдает рекомендации, как надо действовать в данной операции //аналитик//

Активные средства (ресурсы) — то, что опер. стор. использует д/достиж-я цели (напр, запасы вооружений, денежные ресурсы и т.д.)

Контролируемый фактор — величина, знач-е ℓ опред-ся действиями опер стор. //те факторы, ℓ контрол-ся опер.стор-й//
//их мб несколько ⇒ это в-р $x \in M_0$//

Неконтролл. фактор — величина, ∂ влияет на исход оп-ции, но не нах-ся в распоряжении оп. стор. //факторы, ∂ опер. стор. не контроллирует//

Неконтрол. факторы делятся на:

1) Неопределенные факторы — такие неконтрол. ф-ры, д/ ∂ известна только обл-ть знач-й, ∂ они могут принимать

//В-р $y \in N_0 \rightarrow$ мн-во всех возмож. физич. знач-й д/ неопред. ф-ров

Можно считать, что $y \in N \subset N_0$
обл-ть неопред-ти//

а) Стратегии субъектов, ∂ участвуют в операции (противники, имеющие противополож. интересы) — неопред. ф-ры, принадлежащие субъектам, имеющим свои интересы

б) Природные неопределенности (фермер)

в) Неясность цели опер. стор.

//Зад. многокрит. опт-ции: $W_i(x), i=\overline{1,5}$, где i — неопред. ф-р//

2) Случайные ф-ры — неконтрол. ф-ры, ∂ явл-ся случ. велич-ми

//В-р $z \in Z \Longrightarrow \theta(z)$ — закон распред-я//

//Бывают случаи, когда $\theta(z)$ точно неизвестен, а $\theta \in \Theta$ — мн-во законов распред-я случ. в-ра z//

Пример 1 $\Theta = \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathcal{L}\}$
↳ точно неизв. ⟹ неопред-ть

личина, а
ю не нах-ся в
торы, а опер. стор.
контроллирует //
яется на:
я — такие
стна только
ут принимать
физич. знач-й д/
опред-ти //
участвуют в
ющие противо-
-ры, принадлежа-
свои интересы

нности (фермер)
ов.
$\overline{,s}$, где i — неопред. ф-р //
трол. ф-ры, а

пред-я //
неизвестен, а
ч. в-ра z //
неизв. ⇒ неопред-ть

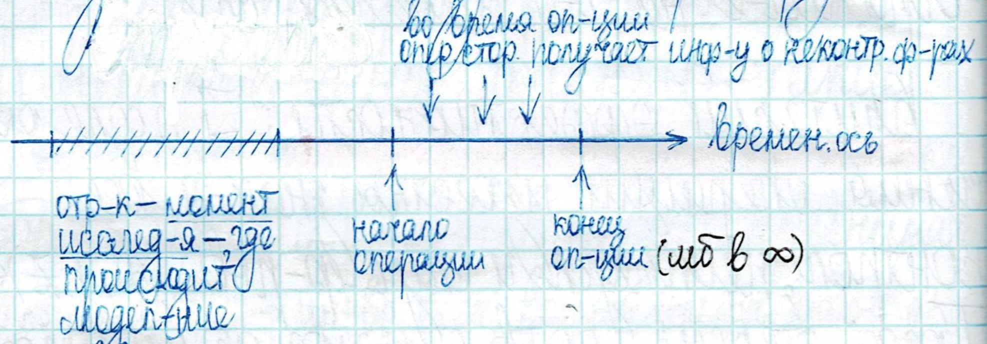
Пример 2 $$\Theta = \{\theta \mid \underbrace{a_i \leqslant \int_Z a_i(z)\,d\theta(z) \leqslant \overline{a_i},\ i=\overline{1,t}\}}_{\text{огранич-я на } \int \text{ные характ-ки}}$$

If $z \in E^1$ — скаляр. сл. в., то $a_i(z) = z^i$ — — огранич-е на i-й момент сл. в.

Критерий эффективности: ∃ после окончания операции известны знач-я всех контрол., неопредел. и случ. ф-ров $\underset{\text{исход оп-ции}}{(x, y, z)} \in M_0 \times N \times Z$. Тогда степень соотв-я исход. оп-ции поставленной цели задается с помощью ф-ции $F(x, y, z)$ — критерия эффект-ти. Чем > знач-е F, тем более успешно проведена оп-ция. Т.е. зад. опер. стор. — сделать F как можно >. Опер. сторона сама назначает этот критерий. // В ант. игре $F(x,y)$ — крит. эффект-ти //

Критерий эффект-ти $F(x, y, z)$ — ф-ция, отражающая мат. цель операции; опер. стор. максимизирует его. Он зависит от контрол. ф-ров $x \in M_0$, неопред. ф-ров $y \in \overset{\leftarrow \text{обл-ть неопред-ти}}{N} \subseteq \underset{\uparrow \text{физически возможные знач-я неопред. ф.}}{N_0}$, случайн. 26/10 ф-ров $z \in Z$, где z — вектор. случ. велич. с закон. распред-я $\theta \in \Theta$, ℓ точно неизвестен, но известно мн-во законов распред. Θ

//оп-ция исслед-ся до начала проведения//



//Многошаг. игра с полн. инф-цией: инфа поступала в тек. времени//

Информационная гипотеза — точное описание того, в какие моменты и какая инф-ция поступает о неконтрол. ф-рах.

Стратегия — выбор контрол. ф-ров в завис-ти от поступающ. инф-ции о неконтрол. ф-рах. (неформал. опр-е)

В рамках данной модели стратегия — ф-ция $\tilde{\tilde{x}}: N \times Z \to M_0$. Мн-во таких ф-ций опред-ся инф. гипотезой, т.е. инф. гип. определяет мн-во стр. M, $\mathscr{U}$ может исп-ть опер. стр

Примеры

1. ∃ никакой доп. инф-ции не ожид-ся ⇒ в

...уч. велич. с
...очно неизвестен,
... распред. ⓗ
...инф-у о неконтр. ф-рах
... ⟹ времен. ось
...мб в ∞)
...отека — точное
...ементы и какая
...пол. ф-рах.
...онтрол. ф-ров в
...-ции о неконтрол.
...и стратегия-
...во таких ф-ций
...нф. гип. опреде-
... исп-ть опер. стр.
...жид-ся ⟹ в

...ач-ве стр. выступают const-ты: $\tilde{x} = x \in M_0$, $M = M_0$.

2. ∃ в начале оп-ции точно известно знач-е $y \in N \Rightarrow \tilde{x}: N \to M_0$, причем опер. стор. может подготовить ∀ такую ф-цию, а показывает, как надо реагировать на ∀ знач-е y. Мн-во всех таких ф-ций — M_y $= \{\tilde{x}(y)\}$

3. ∃ в начале оп-ции точно известна инф-ция о y и z: $(y, z) \in N \times Z \Rightarrow \tilde{x}: N \times Z \to M_0$. Мн-во всех таких стр. — $\tilde{M}$ $= \{\tilde{x}(y,z)\}$ — полная информированность о неконтрол. ф-рах опер. стор. в начале оп-ции.

4. ∃ неопред. ф-р $y = (y_1, \ldots, y_n)$. // кол-во различн. типов вооруж-я противника // В начале оп-ции есть инф-ция о $\sum_{j=1}^{n} y_j \Rightarrow \tilde{x}(y) = f(\sum_{j=1}^{n} y_j)$. Мн-во таких стр. — M: $M_0 \underset{\neq}{\subseteq} M \underset{\neq}{\subseteq} M_y$.

Итак, фактически построена мат. модель оп-ции: $F(x, y, z)$, $x \in M_0$, $y \in N \subseteq N_0$, $z \in Z$, $\theta \in \Theta$; есть инф. гип. $\tilde{x} \underbrace{\in M}_{\text{определяет мн-во стр.}}$.

§16. Оптимальные стратегии в операции.

Какие стр. необх. считать оптим. в рамках мат. модели?

не исключает риска

Принцип гарант-го рез-та: в начале д/каждой стр. $\tilde{x} \in M$ опред-ся оц-ка эфф-ти $W(\tilde{x})$ — некот. гарантир. величина знач-я критерия. //Пример оц-ки эфф-ти: игра Γ_1 → 1ый сообщ стр. x 2му, 2ой — $\boxed{y \in Y(x)} = \text{Argmax}\, G(x,y)$; гарант. выигрыш $W(x) = \min\limits_{Y(x)} F(x,y)$ //

риск

//Другой пример: берем зонт в зав-тисот прогноза погоды//

Опр Стр. $\tilde{x}^0 \in M$ наз-ся оптим-й, if $W(\tilde{x}^0) = \max\limits_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) = F_2(M)$ — наилучш. гарант. рез-т в классе стр. M д/ опер. стор.

//Возможен случай, когда max не дости-ся ⇒ вводится понятие ε-оптим. стр. //

Пример ∃ есть некий инвестор, у к-го условно есть k акций, к-е он желает продать на торгах, к-е проходят в течение n дней: $i = \overline{1,n}$, $n > k$. Каждый день он продает только 1 акцию. В i-й день стоимость акций на торгах равна y_i, $i = \overline{1,n}$. Инвестор наблю-

в операции.
птим. в рамка
чает риска
та: в начале
оц-ка эфф-ти
ичина знач-а
игра $Г_1$ → 1ый сооб
$) = \mathrm{Argmax}\, G(x,y)$;
$\min_{y(x)} F(x,\tilde{y})$ //
/
тим-й, if
наилучш. гарант.
ор.
остиг-ся ⇒ вводит
вестор, у к
е желает продат
ние n дней:
е продает тольк
ость акций
нвестор наблю-

ст знач-я и выбирает момент, когда одавать акции (может оказаться так, то остались непродан. акции и осталось то же самое кол-во дней, тогда он сбрасывает акции по произвол. ценам).

Контрол. ф-ры инвестора: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{акция продана,} \\ 0, & \text{нет} \end{cases}$.

тр.: $\tilde{x}_i(y_i)$ – ф-ция.

Предположим, что y_i – неопред. ф-ры; вестно только, что $N = \{y \mid \underset{\min}{a} \le y_i \le \underset{\max}{b}, i = \overline{1,n}\}$.
ст-ть

$M_0 = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = k;\ x_i = 0,1\}$ – контрол. ф-ры д/инвест.

рит. эфф.: $F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow \min_{y \in N} F(\tilde{x},y) = ka$, $\forall \tilde{x}$.
наилучш. гарант. рез-т

се стр. оптим., реально не происходит ыбора никакой стр.

Крит. $F_1(x,y) = \dfrac{F(x,y)}{\max\limits_{x \in M_0} F(x,y)} \le 1$. Смысл:

м ближе к 1, тем лучше д/инвестора; равнив-ся та Σ, к он получает, с max озмож. Σ в том случае, if бы он знал ны. If применить принцип гарант. рез-та

38
33
36
34
38

к $\mathcal{F}_1$, то там выд-ся пороговая стр.; смысл: есть пороги $y_1^* < \ldots < y_k^*$; инвестор смотрит на 1ый, if цена превзошла, то продает акцию; далее со 2м порогом и т.д.

Оц-ка эффект-ти стр. — $W(\tilde{x})$ — некая гарантир. велич. крит., но по какой ф-ле ее вычислять?

Предположения: $y \in N$ — либо природ. неопред-ть, либо стр. противника, а имеет противополож. интересы и свой критерий $\mathcal{F}_n(x, y, z) \equiv -\mathcal{F}(x, y, z)$; // либ случай, что интересы противника неизв. // противник не знает реализации z; опер. стор. разрешает осреднение критерия по случайностям, связанным с θ.

If предполож-я вып-ны, то ф-ла д/оц-ки эффект-ти: $W(\tilde{x}) = \underbrace{\inf_{y\in N} \inf_{\theta\in\Theta}}_{\text{неопред-ти}} \int_Z \underbrace{\mathcal{F}(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z)}_{\text{осреднение по случайностям (по закону }\theta)}$

// в соотв. с принц. гарант. рез. //

Что было бы, if противник бы знал реализацию $\underset{\text{случ. фактор}}{z}$?: $W'(\tilde{x}) = \inf_{\theta\in\Theta} \int_Z \inf_{y\in N} \mathcal{F}(\underbrace{\tilde{x}(y,z)}_{\text{противник знает в худш. случ}}, y, z)\, d\theta(z)$

…ая стр.; смысл:
…стор смотрит
…, то предает
…м и т.д.

— $W(\tilde{x})$ — некая
…по какой ф-ле

— либо природ.
…ника, λ имеет
…вой критерий

…случаю, что инте-
(противника неизв.)
…зации z; опер.
критерия
…и с θ.

…то ф-ла д/оц-ки
…$\tilde{x}(y,z),y,z)d\theta(z)$
…днение по случайностям (по закону θ)
…ик бы знал реа-
…$\tilde{x}(y,z),y,z)d\theta(z)$
…тивник знает в худш. случае

$W(\tilde{x}) \geq W'(\tilde{x})$ — раз противник знает $\geq$ то оц-ка эффект-ти уменьш-ся

▲ $\forall y \in N, \forall \theta \in \Theta \Rightarrow \underbrace{\int_Z F(\tilde{x}(y,z),y,z)\,d\theta(z)}_{\text{зависит от } y} \geq$

$$\geq \underbrace{\int_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z),y,z)\,d\theta(z)}_{\text{не зависит от } y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\inf_{y \in N} \int_Z F\,d\theta(z)}_{\text{зависит от } \theta} \geq \underbrace{\int_Z \inf_{y \in N} F\,d\theta(z)}_{\text{зависит от } \theta} \Rightarrow$$ берем $\inf_{\theta \in \Theta}$ от обеих частей ■

Как можно исп-ть смеш. стр. в оп-циях?

Предполож-я: не ожид-ся никакой инф-ции о неконтрол. ф-рах, т.е. $M = M_0$, стр. явл-ся const. Тогда наилучш. гарант. рез-т д/опер. стор. $F_2(M_0)$ может оказ-ся невысоким ⇒

⇒ можно исп-ть смеш. стр. //аналог. как с игр. постановками//

Опр Смеш. стр. φ на мн-ве M_0 наз-ся вероятн. распред-ние на этом мн-ве //введение случай-ти в выборе x//

Когда можно исп-ть смеш. стр.?

Должны быть вып-ны основные предполож-я;

Противник не знает реализацию x.

//Если в модели уже есть случай-ть z, то „уговорить" опер. стор. исп-ть смеш. стр. легче//

//в рамках принципа гарант. рез-та//

Ф-ла д/ оц-ки эфф-ти смеш. стр.:

$$W(\varphi) = \underbrace{\inf_{y\in N}\ \inf_{\theta\in\Theta}}_{\text{неопред-ти}} \int_Z \int_{M_0} \underbrace{F(x, y, z)\, d\varphi(x)\, d\theta(z)}_{\text{осреднение по случай-там}} \quad (2)$$

If противник знает реализацию z:

$$W'(\varphi) = \inf_{\theta\in\Theta} \int_Z \inf_{y\in N} \int_{M_0} F(x, y, z)\, d\varphi(x)\, d\theta(z)$$

Упр $\rceil$ $y = (y_1, y_2) \in N = N_1 \times N_2$, $y_1 \in N_1$ – природ. неопред-ть; $y_2 \in N_2$ – стр. противника, $\mathcal{L}$ знает реализацию z. Выписать ф-лу д/ $W(\tilde{x})$ в соотв. с принц. гарант. рез-та.

Оптим. стр. $\tilde{x}^0 \in M$: $W(\tilde{x}^0) = \max\limits_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x})$, где оц-ка эффект-ти опред-ся по ф-ле (1).

Сложность нахожд-я оптим. стр.: возникают зад. оптим-ции по мн-ву ф-ций; но if во мн-ве стр. $\exists$ абсолютно оптим. стр., то зад. max-ции по мн-ву ф-ций можно упрост.

Предполож-е: закон распред-я случ. ф-ра θ известен. Тогда:

рез-т осреднения крит. после подстановки в него стр. $\tilde{x}$

$$\tilde{x}: N \times Z \to M_0 \Rightarrow \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) = \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z)\, d\theta(z)$$

$$\Rightarrow W(\tilde{x}) = \inf_{y\in N} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) \quad (1)$$

…м. стр.:

…$(x) d\theta(z)$ (2)

…о случай-там

…ализацию z:

…$(\varphi(x)) d\theta(z)$

33

…$_1 \in N_1$ — природ.

…ивника, 2 знает

…у д/ $W(\tilde{x})$ в

… $= \max_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x})$,

… по ф-ле (1).

…тим. стр.: возни-

…-ву ф-ций; но

…е оптим. стр., то

…й можно упрост…

…ред-я случ. ф-ра

…-т осреднения крит. после подстановки в него стр. $\tilde{x}$

…$) = \int_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z)$

Опр Стр. $\tilde{x}_1 \in M$ наз-ся абсолютно оптим-й, if $\overline{\overline{F}}(\tilde{x}_1, y, \theta) = \max_{\tilde{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta), \forall y \in \tilde{N}$.

//максимизует наилучш. ответ д/$\forall y$//

Частн. случай: $M_0 \subseteq M \subseteq M_u \Rightarrow \tilde{x}(y)$. //от z нет зав-ти//

Тогда: $\max_{\tilde{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) = \max_{x\in M_0} \overline{F}(x, y, \theta)$ (3) //при усл., что max достиг-ся//

▲ $\forall \tilde{x}\in M: \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) = \overline{\overline{F}}(\tilde{x}(y), y, \theta) \textcircled{\le}, \forall y \in \tilde{N}$

$\textcircled{\le} \max_{x\in M_0} \overline{\overline{F}}(x, y, \theta) \le \max_{\tilde{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \max_{\tilde{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) \le \max_{\tilde{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\tilde{x}, y, \theta) \Rightarrow$ вместо "$\le$" ставим "$=$". ■

//If предполож-е частн. случая д/M не вып-но, то рав-во (3), вообще говоря, не вып-ся//

Пример If $M \subsetneq M_u$ (есть завис-ть от z), то (3) не вып-но. $\exists\ F(x, z) = -(x-z)^2$, //неопред. ф-ров нет//

$\tilde{x}$ — ф-ция из $M_0 = [0, 1]$, $Z = [0, 1]$, распределение сл. ф-ра z равномерное; $\tilde{x}: Z \to M_0$, мн-во всех таких стр. — $\tilde{N}$.

$\max_{\tilde{x}\in M} \left[-\int_0^1 (\tilde{x}(z) - z)^2 dz\right] = 0$, причем 0 достиг-ся на стр. $\tilde{x}(z) = z$

С друг. стороны, $\max_{\substack{x\in M_0 \\ (0\le x\le 1)}} \left[-\int_0^1 (x-z)^2 dz\right] < 0$

Т.е. усл-е $M \subseteq M_4$ существенно д/ (3).

∇3.4.] ∃ абс. оптим. стр. $\tilde{x}_A \in M$. Тогда $\tilde{x}_A$ – оптим. и $\overline{\mathcal{F}}_2(M) = \inf\limits_{y \in N} \max\limits_{\tilde{x} \in M} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(\tilde{x}, y, \theta)$ (4)

// If стр. $\overset{=\tilde{x}(y)}{}$ зависит только от y, то $\max\limits_{x \in M_0}$ //

▲ $\forall \tilde{x} \in M \quad W(\tilde{x}) = \inf\limits_{y \in N} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(\tilde{x}, y, \theta) \leqslant \underline{\inf\limits_{y \in N} \max\limits_{\tilde{x} \in M} \overline{\overline{\mathcal{F}}}} =$

$\underbrace{\overset{\text{абс. опт. стр.}}{=} \inf\limits_{y \in N} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(\tilde{x}_A, y, \theta) = W(\tilde{x}_A)}_{F_2(M)}$ ■

Частный случай: $M_4 = \{\tilde{x} \mid N \to M_0\}$;

$\tilde{M} = \{\tilde{x} \mid N \times Z \to M_0\}$.

Выпишем д/ них ф-лы наилучш. гарант. рез-тов с некотор. предполож-ми.

∇3.5. 1) $\forall y \in N \ \exists \overset{\text{достиг-ся}}{\max\limits_{x \in M_0}} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(x, y, \theta)$. Тогда

$\overline{\mathcal{F}}_2(M_4) = \inf\limits_{y \in N} \max\limits_{x \in M_0} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(x, y, \theta)$, (5)

2) $\forall y \in N, \forall z \in Z \ \exists \overset{\text{достиг-ся}}{\max\limits_{x \in M_0}} \mathcal{F}(x, y, z)$.

Тогда $\overline{\mathcal{F}}_2(\tilde{M}) = \overset{\text{if противник знает } z}{\inf\limits_{y \in N} \int\limits_Z \max\limits_{x \in M_0} \mathcal{F}(x, y, z) \, d\theta(z)}$ (6)

▲ 1) Определим стр. $\tilde{x}_A$: $\underline{\tilde{x}_A(y)}$: $\overline{\overline{\mathcal{F}}}(\tilde{x}_A(y), y, \theta) = \max\limits_{x \in M_0} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(x, y, \theta) \overset{(3)}{=} \max\limits_{\tilde{x} \in M_4} \overline{\overline{\mathcal{F}}}(\tilde{x}, y, \theta), \forall y \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{x}_A$ абс. оптим. $\Rightarrow$ {∇3.4} $\Rightarrow$ справедлива (4) $\Rightarrow$

нно д/(3).

$\hat{x}_A \in M$. Тогда

$\max_{\hat{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\hat{x}, y, \theta)$ (4)

по max //

$\theta) \leq \inf_{y\in N}\max_{\hat{x}\in M} \overline{\overline{F}} =$ ($\max_{x\in M_0}$)

$N \to M_0\}$;

$N\times Z \to M_0\}$.

учш. характ. рез-тов

(x, y, θ). Тогда

)

достиг-ся

$\max_{x\in M_0} F(x, y, z)$.

знач. z

$(x, y, z)\,d\theta(z)$ (6)

$\overline{\overline{F}}(\hat{x}_A(y), y, \theta) =$

$y, \theta), \forall y \in N \Rightarrow$

равенства (4) ⇒

$$\Rightarrow \underline{\overline{\overline{F}}_2(M_u)} \overset{(4)}{=} \inf_{y\in N}\max_{\hat{x}\in M_u} \overline{\overline{F}}(\hat{x}, y, \theta) \overset{(3)}{=} \underline{\inf_{y\in N}\max_{x\in M_0} \overline{\overline{F}}(x, y, \theta)}.$$

Определим $\hat{x}_A$: $\hat{x}_A(y, z)$: $F(\hat{x}_A(y,z), y, z) = \max_{x\in M_0} F(x, y, z)$, $\forall y \in N$, $\forall z \in Z$.

$$\overline{\overline{F}}(\hat{x}_A, y, \theta) = \max_{\hat{x}\in \tilde{M}} \overline{\overline{F}}(\hat{x}, y, \theta) = \int_Z \max_{x\in M_0} F(x, y, z)\,d\theta(z) \quad (7)$$

Док-м (7) ⇒ $\hat{x}_A$ – абс. оптим. ⇒ {Т 3.4} ⇒ {(4)} ⇒ (6).

$$\forall \hat{x} \in \tilde{M} \quad \overline{\overline{F}}(\hat{x}, y, \theta) \overset{\text{опр.}}{=} \int_Z F(\hat{x}(y,z), y, z)\,d\theta(z) \leq$$

max-щее знач-е

$$\leq \int_Z \max_{x\in M_0} F(x, y, z)\,d\theta(z) = \int_Z F(\hat{x}_A(y,z), y, z)\,d\theta(z) =$$

$$= \overline{\overline{F}}(\hat{x}_A, y, \theta), \ \forall y \in N \Rightarrow \text{рав-во}$$

Из ф-лы (7) ⇒ {Т 3.4 ⇒ (4)} ⇒ $\underline{\overline{\overline{F}}_2(\tilde{M})} \overset{(4)}{=}$

$$= \inf_{y\in N}\max_{\hat{x}\in M} \overline{\overline{F}}(\hat{x}, y, \theta) \overset{(7)}{=} \underline{\inf_{y\in N}\int_Z \max_{x\in M_0} \overline{F}(x, y, z)\,d\theta(z)} \quad \blacksquare$$

34

//д/разных мн-в стр. будем искать все оптим. и абс. оптим. стр.//

Пример ∃ $M_0 = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$,

$i \in M_0$ – контрол. ф-р, $j \in N$ – неопред. ф-р. Крит. эфф-ти: $(F(i,j))_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

-ции о неопред. ф-ре не ожид-ся ⇒ стр – выбор номера строки

$$M = M_0: \ F_2(M_0) = \max_{1\le i\le 3} \underbrace{\min_{1\le j\le 4} F(i,j)}_{\text{оц-ка эфф-ти}} = 1 \Rightarrow i^0 = 3 \text{ – опт. стр.}$$

//Ищем min в строках, потом max из них//

38
37
36
35

В M_0 нет абс. опт. стр.: if бы была, то $\exists$ $\hat{i}_A$: $F(\hat{i}_A, j) = \max\limits_i F(i,j)$, $j=\overline{1,4}$ или

$F(\hat{i}_A, j) \geqslant F(i,j)$, $\forall i = \overline{1,3}$, $\forall j = \overline{1,4}$. Т.е. тогда бы стр. с номером $\hat{i}_A$ доминировала остальные.

б) $M = M_4$: стр. $\tilde{i}: N \to M_0$, их кол-во — 3^4. ↗ ожид-ся полная инф-ция о j

В соотв. с Т3.5: $F_2(M_4) = \min\limits_j \max\limits_i F(i,j) = 2$

// В столбце берем max, из них – min //

Стр. $\tilde{i}^0$ оптим., if для нее $W(\underline{\tilde{i}^0}) = 2 = \min\limits_j F(\tilde{i}^0(j), j)$

или $F(\tilde{i}^0(j), j) \geqslant 2$, $j = \overline{1,4}$

$\tilde{i}^0(1) = \underline{2}, 3$ // по столбцу смотрим, какие номера строк, в к. числа $\geqslant 2$ //

$\tilde{i}^0(2) = 1, 2, \underline{3}$

$\tilde{i}^0(3) = \underline{1}, 3$ $\qquad$ _ – конкретные оптим. стр.

$\tilde{i}^0(4) = 1, \underline{2}$

Всего опт. стр $= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$

$\tilde{i}_A(j)$ – абс. опт. стр.: $\max\limits_i F(i,j) = F(\tilde{i}_A(j), j)$, $j = \overline{1,4}$

$\tilde{i}_A(1) = ③$ $\qquad$ // max столбца, точнее номер //

$\tilde{i}_A(2) = ①, 2, 3$ $\qquad$ ○ – конкретные оптим. стр.

$\tilde{i}_A(3) = ①$

$\tilde{i}_A(4) = 1, ②$ $\qquad$ Всего: $1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

бы была, то ∃
,4 или
j=$\overline{1,4}$. Т.е. тогда
ировала осто-
j
кол-во — 3^4.
$\min\limits_j \max\limits_i F(i,j)=2$
$= \min\limits_j F(i^0(j),j)$
кие номера строк,
оптим. стр.
4
$) = F(i_A(j),j),\ j=\overline{1,4}$
нее номер//
ие оптим. стр.
$\cdot 2 = 6$

M опред-ся след. инф. гипотезой: $\exists\ N = N_1 \cup N_2$, $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$. В начале оп-ции опер. стор. будет известно, что $j \in N_1$ или $j \in N_2$.

Стр. явл-ся след. ф-цией $\tilde{i}$: $\tilde{i}(j) = \begin{cases} i_1, & j \in N_1, \\ i_2, & j \in N_2, \end{cases}$ $\tilde{i} \in M$.

абс. опт. номера строк

$i_1^A = 3$, $i_2^A = 1$, т.к. это max эл-ты в столбцах, то по Т3.4, $F_2(M) = \min\limits_j \max\limits_i F(i,j) = 2$ //уже посчитали//

Оптим. стр.: $F(i^0(j),j) \geq 2$, $j = \overline{1,4} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow i_1^0 = 2, 3$; $i_2^0 = 1$ //номера строк, в к эл-ты ≥ 2//

с помощью производ. по направл. ф-ции min W(x)

§$\overset{18}{17}$ Необходимое условие для оптимальных (максиминных) стратегий.

$\exists$ случ. ф-р z отсутствует $\Longrightarrow \overset{\text{крит.}}{F}(x,y)$, $\overset{\text{контрол.}}{x \in M_0}$, $\overset{\text{неопр.}}{y \in N}$. В кач-ве стр. будем исп-ть только const, т.е. $M = M_0$. Оц-ка эффект-ти: $W(x) = \overset{\text{достиг-ся}}{\min\limits_{y \in N}} F(x,y)$. Максимин. стр. x^0: $W(x^0) = \max\limits_{x \in M_0} W(x)$.

$\exists$ $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$. ∢ ф-цию многих пер-х $h(x)$. Также возьмем в-р $\alpha \in E^m$, то произв-й ф-ции $h(x)$ по направлению α в т. x наз-ся предел

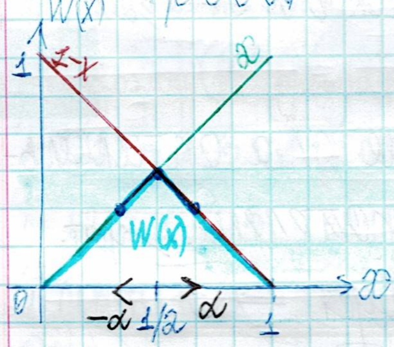
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{h(x+\varepsilon\alpha)-h(x)}{\varepsilon} = \frac{dh(x)}{d\alpha}.$$

Частный случай: if $h(x)$ дифф-ма (т.е. у нее есть непр. частн. произв.), то

$$\frac{dh(x)}{d\alpha} = (h'(x), \alpha)$$

Мы будем ∢ произв. по напр. ф-ции min – $W(x)$, причем ф-ция не всегда дифф.

Пример ∃ $x \in E^1$, $W(x) = \min[x, 1-x]$.



В $x = 1/2$ ф-ция не дифф. (из-за излома)

$\alpha = (1)$ // вдоль оси

$-\alpha = (-1)$ // против оси

$$\frac{dW(1/2)}{d\alpha} = -1 = \frac{dW(1/2)}{d(-\alpha)}$$

// это ⇒ из приращ-й •–• /

3.6. ∃ $D \subset E^m$ – обл-ть евклид. пр-ва, N – компакт метрич. пр-ва. ∃ $F(x,y)$ -крит., $F'_{x_i}(x,y)$, $i = \overline{1,m}$, непр. на $D \times N$. Тогда в ∀ точке $x \in D$ по ∀ направл. $\alpha \in E^m$ ∃ произв. по направл. $\frac{dW(x)}{d\alpha} = \min\limits_{y \in N(x)} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y)$, где $N(x) = \operatorname{Argmin}\limits_{y \in N} F(x,y)$ (1)

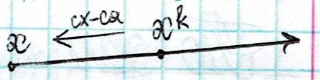
\\ $(\alpha, F'_x(x,y))$ – произв. по напр. α ф-ции F в т.x при фикс

диффр-ма (т.е.
в.), то

по напр. ф-ции
не всегда дифф.
$) = \min[x, 1-x]$.
-ция не дифф.
)
доль оси
/против оси
$= \frac{dW(1/2)}{d(-\alpha)}$
ращ-й •-•/

вклид. пр-ва,
$] \overset{\text{-крит.}}{F}(x,y)$,
$\times N$. Тогда в ∀
$x \in E^m$ ∃ произв.
$i\, F'_{x_i}(x,y)$, где
$(\alpha, F'_x(x,y))$ — произв. по напр. α ф-ции F в т.х приф

$\forall x \in D$, $\forall \alpha \in E^m$ ∡ посл-ть $\varepsilon_k \to 0+$, и точки $x^k = x + \varepsilon_k \alpha$, $k = 1, 2, \ldots$



или $x_i^k = x_i + \varepsilon_k \alpha_i$, $i = \overline{1,m}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} = ?$$ //Д-м ∃ние lim//

min-щие игреки

∡ посл-ть точек $y^k \in N(x^k)$ и возьмём $y \in N(x) \Rightarrow \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \overset{\text{опр.}}{=} \frac{F(x^k, y^k) - F(x,y)}{\varepsilon_k} =$

$$= \frac{\overbrace{F(x^k, y^k) - F(x^k, y)}^{\leq 0} + F(x^k, y) - F(x,y)}{\varepsilon_k} \leq$$

$$\leq \frac{F(x^k, y) - F(x,y)}{\varepsilon_k} = \left\{\text{ф-ла конечн. приращ. Лагр.}\right\} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i^k - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_k (x^k - x), y)}{\varepsilon_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_k (x^k - x), y)$$

Т.к. y фикс., то перейдём к lim:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y), \ \forall y \in N(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y) \quad (2)$$

Д-м аналог. нер-во д/ $\underline{\lim}$:

$$\underline{\lim} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y) \quad (3)$$

// Из (2)+(3) $\Rightarrow$ (1), т.к. if $\underline{\lim} \geqslant \overline{\lim} \Rightarrow \exists \lim$ //

По опр. $\underline{\lim}$: $\exists\, k_l,\ l=1,2,\dots$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} = \lim_{l\to\infty} \frac{W(x^{k_l})-W(x)}{\varepsilon_{k_l}}$$

Возьмем $\overset{\text{min-щие}}{y^{k_l}} \in \tilde{N}(x^{k_l})$. Без потери общ-ти, $y^{k_l} \to y^*$ (из св-в компакта); $y^* \in \tilde{N}(x)$ — почему?

$\mathcal{F}(x^{k_l}, y^{k_l}) \overset{\text{опр.}}{\leqslant} \mathcal{F}(x^{k_l}, y),\ \forall y \in \tilde{N}$. При фикс. y перейдем к lim: $\mathcal{F}(x, y^*) \leqslant \mathcal{F}(x,y),\ \forall y \in \tilde{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^*$ — min-щий эл-т при задан. x.

// Возвращ-ся к док-ву (3) //

$$\frac{W(x^{k_l})-W(x)}{\varepsilon_{k_l}} = \frac{\mathcal{F}(x^{k_l},y^{k_l})-\mathcal{F}(x,y^*)}{\varepsilon_{k_l}} =$$

$$= \frac{\mathcal{F}(x^{k_l},y^{k_l})-\mathcal{F}(x,y^{k_l}) + \overbrace{\mathcal{F}(x,\enclose{circle}{y^{k_l}})-\mathcal{F}(x,\enclose{circle}{y^*})}^{\geqslant 0}}{\varepsilon_{k_l}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\mathcal{F}(X^{k_l},y^{k_l})-\mathcal{F}(x,y^{k_l})}{\varepsilon_{k_l}} = \left\{\begin{matrix}\text{ф-ла конечн.}\\ \text{приращ. Лагр.}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{F}'_{x_i}(x+\theta_{k_l}(x^{k_l}-x), y^{k_l})$$

Перейдем к lim в обеих частях нер-ва:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon^k} \geqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{F}'_{x_i}(x,y^*) \geqslant \min_{y\in \tilde{N}(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{F}'_{x_i}(x,y)$$

$\Rightarrow$ нер-во (3) док-но $\Rightarrow$ (1) ■

$\overset{\text{эк. задач}}{\text{Частн.}}$ случай: $\tilde{N}(x) = \{y(x)\}$, if $\mathcal{F}(x,y) \overset{\text{строго}}{\smile}_y$. В рамках Т3.6. можно утв-ть, что, if

$\overline{im} \Rightarrow \exists \lim$ //

$, \ldots :$

$-W(x)$

потери общ-ти;

$y^* \in N(x)$ — почему?

При фикс. y

$F(x,y), \forall y \in N \Rightarrow$

н. x

$\frac{x, y^*)}{} =$

$\overbrace{c, \boxed{y^{k_l}}) - F(x, \boxed{y^*})}^{\geq 0} \geq$

а конечн. } =
наиз. Лагр. }

е)

х частях нер-ва:

$y^*) \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x,y)$

}, if $F(x,y) \overset{строго}{\cup} y$. В

что, if

$W(x) = F(x, y(x))$, то $W(x)$ явл-ся дифф. Откуда это следует? $\frac{dW(x)}{d\alpha_i} = F'_{x_i}(x, y(x))$, где $\alpha = (0, \ldots, 0, \underline{1}, 0, \ldots, 0)$ — направл-е вдоль i-й оси коорд. Т.к. частн. произв. непр., то $F(x, y(x))$ дифф.

Пример. Пусть $x = (x_1, x_2)$. ∡ $W(x) = \min_{1 \leq j \leq 3} f_j(x)$, $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2$, $f_2(x) = 3x_2^2$, $f_3(x) = \cos(\pi x_1) + 3x_2$.

Возьмем т. $x^0 = (1, -1)$, $\alpha = (1, 1)$. Найдем в т. x_0 произв. по направл. ф-ции $W(x)$ по направл. α.

Но почему можно исп-ть (1)? Min берется по конечн. мн-ву $N = \{1, 2, 3\}$, а конечн. мн-во легко „превратить" в компакт (задать метрику).

$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} = \min_{j \in N(x^0)} (\alpha, f'_j(x^0))$$

$f_1(x^0) = 2$, $f_2(x^0) = 3$, $f_{\underline{3}}(x^0) = \overset{\min}{\boxed{-4}}$

$N(x^0) = \{\underline{3}\}$

$f'_3(x^0) = (0, 3)$; $(\alpha, f'_3(x^0)) = 3 \Rightarrow \frac{dW(x^0)}{d\alpha} = 3$

㊳
㊲
㊱
㊵

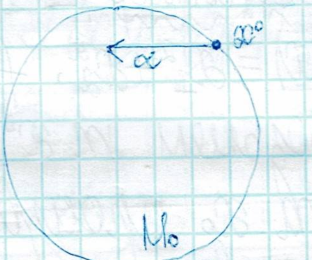
Сл (∇3.6)] в усл-х ∇3.6 M_0 – вып. компакт в евклид. пр-ве, $M_0 \subset D \subset E^m$, и вып-ны все остальные усл-я ∇3.6.] x^0 – maxmin стр. из M_0. Тогда д/ x^0 вып-ся след. необх. усл-е:

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0 \quad (1)$$

все направл.$^\alpha$, допустим. в т. x_0, д/ мн-ва M_0 →

▲ $\forall \alpha \in \mathcal{L}(x^0) \overset{\text{опр}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^0 + \varepsilon\alpha \in M_0$.



$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} \overset{\text{опр}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{W(x^0 + \varepsilon\alpha) - W(x^0)}{\varepsilon}$$

Т.к. $W(x^0)$ max-т ф-цию W,

то разность $W(x^0 + \varepsilon\alpha) - W(x^0) \leqslant 0 \Rightarrow \frac{dW(x^0)}{d\alpha} \leqslant 0$

Из ф-лы (1) $\Rightarrow \min\limits_{y \in N(x^0)} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leqslant 0$ – т.к. верно $\forall \alpha$, то $\sup\limits_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} \min\limits_{y \in N(x^0)} \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leqslant 0$ ▨

35

] $M_0 = [a, b]$, $x \in E^1$; $M_0 \subset D$.

∇**3.7** (необх. усл-е д/ maxmin стр. из отр-ка)

крит. ↓

] $M_0 = [a, b] \subset D$, N – компакт метрич. пр-ва; $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$ – непр. на $D \times N$. Тогда д/ maxmin стр. x^0 из M_0 справедливо одно из след. необх. усл-й:

M_0 – вып. компакт

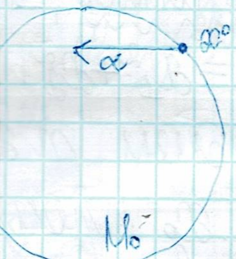
, и вып-ны

x^0 – maxmin

вып-ся след.

$F'_{x_i}(x^0,y) < 0$ (4)

$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{dW(x^0)}{d\alpha} \leqslant 0$

$(x^0,y) \leqslant 0$ – т.к.

$F'_{x_i}(x^0,y) \leqslant 0$ ■

35

0.

стр. из отр-ка)

метрич. пр-ва;

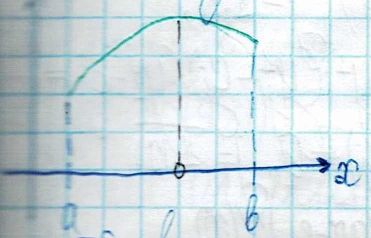
$\times N$. Тогда д/

во одно из след.

$x^0 = a$ или $x^0 = b$; // x^0 – крайняя т. отр-ка //

∃ min-щие $y^1 \neq y^2 \in N(x^0)$; ← new усл-е // Обобщение на случай $W(x)$ – ф-ции min //

$N(x^0) = \{y^1\}$, но $F'_x(x^0,y) = 0$.



// Max-ция дифф. ф-ции
If max – внутри [ ], то
произв. в этой т. = 0
но max м/б на краю //

наша Т

If вып-но а) или б), то все доказано. Случай, когда а) и б) не вып-ны, тогда выведем, что необх. вып-ся в).

а) не вып-но ⇒ $a < x^0 < b$

б) не вып-но ⇒ $N(x^0) = \{y^1\}$

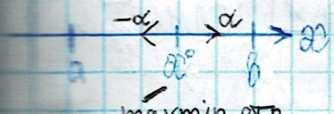
Воспользуемся Сл Т3.6 (4).

Возьмем направление α:

$1 \cdot F'_x(x^0,y^1) \leqslant 0$.

Направление $(-\alpha)$:

$(-1)\, F'_x(x^0,y^1) \leqslant 0$.



maxmin стр.

2х нер-в ⇒ $F'_x(x^0,y^1) = 0$ ⇒ в) вып-но ■

Сл – д/приложений (N – параллепипед)

∃ усл-я Т3.7 вып-ны и $N = \{y \in E^r \mid$
$< y_j \leqslant d_j\}$. $F'_{y_j}(x,y)$ ∃ на $M_0 \times N$, $j = \overline{1,n}$. Тогда

38

37

36

40

След. x^0 maxmin стр. из отр-ка вып-но одно из необх. усл-й:

1) $\exists\, y^1 \in N^-(x^0) : F'_x(x^0, y^1)(x^0 - a)(x^0 - b) = 0 = F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j)$, $j = \overline{1,n}$;

2) $\exists\, y^1 \neq y^2 \in N^-(x^0) : F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) = F'_{y_j}(x^0, y^2)(y_j^2 - c_j)(y_j^2 - d_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$.

$F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2)$ ← знач-е $_{\min}$ $W(x^0)$

▲ Т.к. x^0 – maxmin стр. из отр-ка, то по Т3.7 справедливо либо а), либо б), либо (в).

If вып-но а) или в), то $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (1). → Сл (необх. усл-е 1))

Очевидно (подстановка усл-й а)/(в) ⇒ 0). Также $\min F(x^0, y^1 \| y_j) = F(x^0, y^1)$ при $y_j = y_j^1$. Ф-ция

$c_j < y_j < d_j$ F диффер-ма на отр-ке ⇒ в т. y_j^1 дости-ся min ф-ции ⇒ min либо в краях отр-ка, либо внутри отр-ка ⇒ произв. $= 0$. ⟹ 1) полностью доказано.

Из б) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ 2). y^1, y^2 – min-ции ⇒ производ-я равна 0 и $F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2) = W(x^0)$, что тоже верно ■ $\boxed{36}$

Алгоритм поиска maxmin стр. → x^0

-ен-но) одни из

а)$(x^0-b)=0=$

$j=\overline{1,n};$

$(y_j^1-c_j)(y_j^1-d_j)=$

$=0,\ j=\overline{1,n}.$

-е $W(x^0)$

тр-ка, то по

бо б), либо (в).

(1). → Сл (необх. усл-е 1))

)/(в) $\Rightarrow$ 0). Также

и $y_j=y_j^1$. Ф-ция

$\Rightarrow$ в т. y_j^1 дости-ся

аях отр-ка, либо

1) полностью доказано.

ие $\Rightarrow$ произвед-я

$=W(x^0)$, что тоже

min стр. → x^0

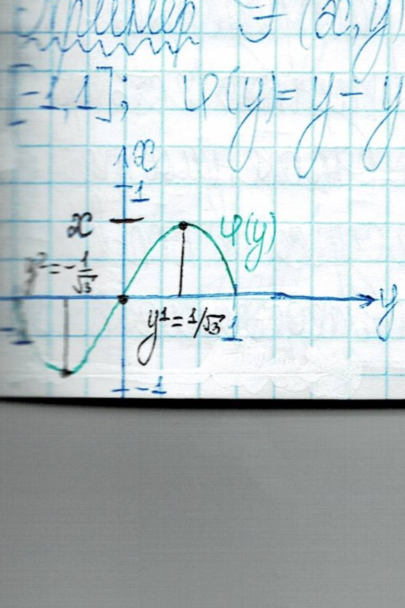
С-ма относит. неизв. $x^0,\ y_j^1,\ j=\overline{1,n} \Rightarrow n+1$ неизв $\Rightarrow n+1$ уравн-ий $\Rightarrow$ с-ма имеет конечный набор реш-й в невырожд. случае (безуслов-н. мин-я можно отбрасывать по усл-ю $y^1 \in N(x^0)$)

С-ма относит. неизв. $x^0,\ y_j^1,\ y_j^2,\ j=\overline{1,n} \Rightarrow 2n+1$ неизв $\Rightarrow 2n+1$ ур-ий $\Rightarrow$ с-ма имеет конечный набор реш-й в невырожд. случае

Т.е. с помощью усл-й можно выявить подозрительные x^0.

П. M_0^* — все x^0, к. появл-ся в реш-х с-м. — конечное мн-во; N^* — все y^1 и y^2, к. появл-ся в реш-х с-м 1) и 2). Тогда $x^0 \in \max\limits_{x\in M_0^*} \min\limits_{y\in N^*} F(x,y)$ — уже не подозрительные x^0.

Пример $F(x,y) = -(x-y+y^3)^2$, $M_0=[-1,1]$, $=[-1,1]$; $\varphi(y)=y-y^3 \Rightarrow$ тогда F — отклонение $\overset{\in[-1,1]}{x}$ от знач-я $\varphi(y)$



$N(x)=\{-\frac{1}{\sqrt3}\},\ x>0,$

$\{\pm\frac{1}{\sqrt3}\},\ x=0,$

$\{\frac{1}{\sqrt3}\},\ x<0$

min-ные игреки

$y \in N(x)$; $F'_x(x,y) = -2(x-y+y^3) \neq 0, \forall x, \forall y$.

$$M_0^* = \{\underbrace{\pm 1}_{\text{из 1)}}, \underbrace{0}_{\text{из 2)}}\}, \quad N^* = \{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

Зад. нахожд-я maxmin д/след. м-цы

$$x^0 \in \max_{x \in M_0^*} \min_{y \in N^*} F(x,y):$$

$$\left(F(x,y)\right)_{x \in M_0^*, y \in N^*} = \begin{array}{c|cc} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & -\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ 0 & -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ 1 & -\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{array} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Maxmin стр. $x^0 = 0$

02/11

§15 §18. Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов

// Игра „Нападение-оборона" //

Общая постановка: имеется n пунктов $i = \overline{1,n}$, по к опер. стор. распределяет ресурс в кол-ве $A > 0$. На i-м пункте есть ф-ция $f_i(t)$ — ф-ция эффект-ти отложения ресурса в этот пункт (вклад ресурса в кол-ве $t \Rightarrow$ $\Rightarrow$ получаем $f_i(t)$). Распределение ресурса

$) \neq 0,\ \forall x, \forall y.$

след. м-цы

$\Longrightarrow$

нального рас-

ется n пунктов
деляет ресурс
е есть ф-ция
ения ресурса
в кол-ве $t \Rightarrow$
ление ресурса

ается в-ром $x=(x_1,\dots,x_n)$, где x_i – кол-во
урса, направляемое на i-й пункт
Будем < 2 типа зад – непрерывные
рс ∞ делимый) и дискретные (ре-
рс штучный, т.е. $A\in\mathbb{Z}$)
Огранич-я на стр. опер. стр. x: д/непр
$M_0=\{x\mid\sum_{i=1}^{n}x_i=A;\ x_i\geq 0,\ i=\overline{1,n}\}$; д/дискр.
$M_0'=\{x\in M_0\mid x_i\in\mathbb{Z},\ i=\overline{1,n}\}$.

Непр. задача на maxmin: необходимо
$$\max_{x\in M_0}\underbrace{\min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i)}=\min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i^0)\quad\text{(I)}$$

//Распределение денежн. ср-в: чтобы не было бедных//

В таких зад. считаем, что $f_i(t)$ возрастающая и непр., определенная на $[0, A]$.

Предполож-е: $f_1(0)\leq f_2(0)\leq\ldots\leq f_n(0)$ //1й пункт слабейший//

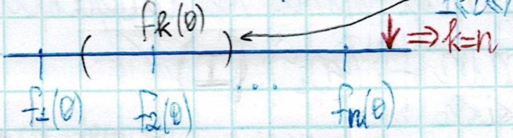
Т 3.8. (Принцип уравнивания / Необх. и дост. усл-е оптим-ти д/ зад. (I)) В сделанных предполож-х, ∃ x^0 – оптим. распред. рес-ов д/ (I). Тогда д/ x^0 вып-ся след. н-о. усл-е: номер $1\leq k\leq n$: $f_1(x_1^0)=\ldots=f_k(x_k^0)<f_{k+1}(0)$,

$x_i^0 = 0,\ i=\overline{k+1,n}$. (1) При этом, if $f_1(0)=\ldots=f_n(0)$, то $k=n$. Оптим. распред. рес-ов в зад. (I) !.

▲ $\boxed{\Rightarrow}$ $\rceil$ x^0 – оптим. распр. зад. (I) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (1)

Заметим, что x^0 заведомо $\exists$, т.к. ф-ция $\min\limits_i f_i(x_i)$ непр., как ф-ция n перем-х, т.к. каждая $f_i(t)$ непр. $\Rightarrow M_0$ – компакт $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ max min достиг-ся.

$\rceil\ \exists k: f_k(0) < \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0)$ (2)



Д-м, что $x_i^0=0,\ i=\overline{k+1,n}$. От противного, $\rceil\ \exists\ i_1 \geq k+1: x_{i_1}^0 > 0$. Построим новое распред. ресурсов z: $z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0-\varepsilon, & i=i_1,\\ x_i^0+\frac{\varepsilon}{n-1}, & i\neq i_1,\end{cases}$ $\varepsilon>0$ – дост. малое.

$f_i(z_i) > f_i(x_i^0) \geq \min\ldots,\ i\neq i_1$

$f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0-\varepsilon) > f_{i_1}(0) \overset{\text{предполож-е}+(i_1\geq k+1)}{\geq} f_{k+1}(0) \overset{(2)}{>}$

$\overset{(2)}{>} \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$

← Тогда $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(z_i) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) \Rightarrow$!? с if $f_1(0)=\ldots=$

спред. рес-ов

д. (I) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (1)

$\exists$, т.к. ф-ция

n перем-х,

о – компакт ⇒

$) < f_{k+1}(0)$ (2)

От противного,

им новое

$-\varepsilon,\ i=i_1,$

$+\frac{\varepsilon}{n-1},\ i\ne i_1,\ \varepsilon>0$ –

редполож-е + $(i_1 \geqslant k+1)$

↓

$\geqslant f_{k+1}(0) \overset{(2)}{>}$

$(x_i^0) \Rightarrow$ (!?) с

о-м д/ x^0.

Д-м, что $f_1(x_1^0)=\ldots=f_k(x_k^0)$, т.е.

$f_i(x_i^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0),\ i=\overline{1,k}$. От противного,

$\exists i_1 \le k: [\underline{f_{i_1}(x_{i_1}^0)} > \min\limits_i f_i(x_i^0)]$. Заметим, что,

усл. (2), $\min\limits_i f_i(x_i^0) \geqslant f_k(0) \geqslant \underline{f_{i_1}(0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{i_1}^0 > 0$. Определим новое распр. ресурсов так же, как и в начале док-ва. Тогда

$$\left.\begin{aligned} & f_i(z_i) > f_i(x_i^0),\ i\ne i_1 \quad \text{//уже было//} \\ & f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0-\varepsilon) \underset{\text{малое } \varepsilon \ +[\ ]}{>} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \min\limits_i f_i(z_i) > \min\limits_i f_i(x_i^0) \Rightarrow$ (!?), аналогично.

$\Leftarrow$] (1) вып-но д/ $x^0 \overset{?}{\Longrightarrow} x^0$ – опт. расп. зад. (I).

$\forall x\in M_0,\ x\ne x^0$ док-м, что $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i) < \min\limits_i f_i(x_i^0)$.

Т.к. $x \ne x^0$, то $\exists j: x_j < x_j^0$

$\underline{\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i)} \le f_j(x_j) \underbrace{<}_{} f_j(x_j^0) \overset{(1)}{=} \underline{\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)} \Rightarrow$ //из (1) ⇒ $j\le k$//

$\Rightarrow x^0$ – опт. распр. рес. ! также $\Rightarrow$ из-за строгого $(\leq)$ нер-ва (д/ $\forall$ другого распред. знач-е будет $<$, т.е. max min) ▨

Алгоритм д/ нахожд-я опт. распр. рес-ов

Дана задача (I), и след. с-мы ур-й:

$f_i(x_i^0) = C,\ i=\overline{1,k}$, при этом можем начинать с $k=n, n-1, \ldots$; $\sum_{i=1}^{k} x_i = A$. $\Rightarrow$ $k+1$ ур-е $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $k+1$ неизв — $x_i^0,\ i=\overline{1,k}$, и C.

Решаем с-мы и смотрим: $x_i^0 \geq 0$ и решаем до тех пор, пока не вып-ся усл-е оптим-ти: $C < f_{k+1}(0)$

Теперь ∢ дискрет. зад. (I):

$$\max_{x\in M_0'} \min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i) = \min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i^*) \quad (I)'$$

+ написать опр-е д/ M_0' (начало ㊲)

Предполож-е: $f_i(t)$ — возрастающие ф-ции дискрет. арг-та.

$\forall x\in M_0'$ определим мн-во

$I(x) = \operatorname{Arg}\min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i)$ — мн-во пунктов, на к достиг-ся min знач-е эфф-ти.

$\exists$ $|I(x)|$ — (кол-во/число эл-тов в этом конечном мн-ве.

∇3.9. В сделанных предполож-х $\exists$ x^* — оптим. распр. зад. $(I)'$, причем $|I(x^*)|$ минимально среди всех оптим. распред. Тогда д/ x^* вып-ся след. н.и д. усл-е: е $x_j^* > 0$, то уложем начинать

k+1 ур-е ⇒

С.

пим: $x_i^0 \geq 0$ и

е вып-ся усл-е

37

д. (I):

) (I)' + написать опр-е д/N_0 (начало 37)

зрастающие

-во

пунктов, на ℓ

и.

о эл-тов в этом

полож-е ∃ x^*-

ем $|I(x^*)|$ мини-

распред. Тогда

: if $x_j^* > 0$, то

$f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^*-1)$ (3) — это усл-е явл-ся усл. опт-ти зад. (I)' без всяких доп. предполож-й.

If мы вкладываем какой-то ресурс в j-й пункт ($x_j^* > 0$), то одновременно вып-но

$$f_j(x_j^*) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) \geq f_j(x_j^*-1) \Rightarrow$$ эффекты близки к min//

$\Rightarrow$] x^*-оптим. распр., причем $|I(x^*)|$ минимально среди всех оптим. распред. $\overset{?}{\Rightarrow}$ (3)

От противного:] $\exists\, j$: $x_j^* > 0 \Rightarrow \underbrace{f_j(x_j^*-1)} > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^*) = f_\ell(x_\ell^*)$

< Опр. распр. ресурсов z: $z_i = \begin{cases} x_j^*-1, & i=j \\ x_\ell^*+1, & i=\ell, \\ x_i^*, & i \neq j,\ell \end{cases}$

Тогда $f_i(z_i) \geq \min_i f_i(x_i^*)$, но т.к. x^*-опт. распр. рес.,

здесь м.б. только „=" $\Rightarrow I(z) = I(x^*) \setminus \{\ell\}$.

Т.о., мы нашли новое оптим. распред. рес. z, и $I(z)$ содержит меньшее число эл-тов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$? с выбором x^*.

$\Leftarrow$] д/x^* вып-но усл-е оптим-ти (3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ x^*-опт. распред. в зад. (I)'

$\forall x \in N_0^n$, $x \neq x^* \Rightarrow \exists j: x_j < x_j^* \xRightarrow{\text{целые компоненты}} x_j \leq x_j^*-1$.

$\Rightarrow f_i(x_i) \leq f_j(x_j) \leq f_j(x_j^*-1) \overset{(3)}{\leq} \min_i f_i(x_i^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^*$ реализует max ф-ции min ▨

Упр Придумать пример, когда в $(I)'$ опт. рас. x^* не !.

эффект-й

Алгоритм реш-я зад. $(I)'$

Шаг 1: выбир-ся некоторое распред. $x^{(1)} \in M_0'$! (берется реш-е непр. зад. x^0, а потом оно округляется так, чтобы Σ компонент была равна A, компоненты ≥ 0)

Шаг k: получено x^k, проверяем для него усл-е (3) — if $x_j^{(k)} > 0$, то $\min\limits_i f_i(x_i^{(k)}) \geq f_j(x_j^{(k)} - 1)$. If вып-но, то k-е распред. – оптим. If не вып-но (т.е. $f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min\limits_i f_i(x_i^{(k)})$ $\overset{= f_l(x_l^{(k)})}{}$), то

Шаг k+1: переходим к след. шагу k+1 и определяем прибл-е $x^{(k+1)}$. Оно опред-ся по ф-ле, аналогичной опр-нию Z, т.е. $x^{(k+1)}$: $x_i^{(k+2)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j, \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l, \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l. \end{cases}$

Возможны след. случаи:

1) $|I(x^{(k)})| = 1 \Rightarrow \min\limits_i f_i(x_i^{(k+1)}) > \min\limits_i f_i(x_i^{(k)})$

2) $|I(x^{(k)})| \geq 2 \Rightarrow \min\limits_i f_i(x_i^{(k+1)}) = \min\limits_i f_i(x_i^{(k)})$, но

и min ▨

когда в (I)'

(I)'

торое распред.

р. зад. x^0; а

, чтобы $\sum$

A, компоненты ≥ 0)

проверяем $\exists$ него

$(x_i^{(k)}) \geq f_j(x_j^{(k)}-1)$.

— оптим. If

$\min_i f_i(x_i^{(k)})$), то $\overset{= f_l(x_l^{(k)})}{}$

и определяем

ор-ле, аналогич-

$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)}-1, & i=j,\\ x_l^{(k)}+1, & i=l,\\ x_i^{(k)}, & i\neq j,l. \end{cases}$

$> \min_i f_i(x_i^{(k)})$

$= \min_i f_i(x_i^{(k)})$, $\Rightarrow$ 40

при этом $I(x^{(k+1)}) = I(x^{(k)}) \setminus \{l\}$

Такое может произойти не $>$, чем n раз $\Rightarrow$ алгоритм конечный //

Пример (нахождение maxmin непр/дискр.)

$n = 4$, $A = 10$. < (непр. зад.: $\max\limits_{x\in M_0}\min\limits_{1\le i\le 4}(i x_i^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_i(t) = it^2$; $f_i(0) = 0$, $i = \overline{1,4} \Rightarrow$ в соотв. с принципом уравнивания, $k = n = 4 \Rightarrow$ напишем с-му, чтобы уровнять хар-ки-ть:

$(x_i^0)^2 = C$, $i = \overline{1,4}$, $\sum x_k^0 = 10$ $\overset{\text{множ-ть}}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} x_i^0 = \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{i}}, i = \overline{1,4} \\ \sum\limits_{k=1}^{4} x_k^0 = 10 \end{cases}$ $\Rightarrow$ получим $C \Rightarrow x_i^0$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1} \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{k}} = 10 \Rightarrow x_i^0 = \dfrac{10}{\sqrt{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}}$, $i = \overline{1,4}$

< дискрет. зад.: $x_1^0 \approx 3,59$; $x_2^0 \approx 2,54$; $x_3^0 \approx 2,07$; $x_4^0 \approx 1,8$ } приближ. знач-я

чление: $x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$ ↓ т.к. $\sum$ компонент $= 10$

Алгоритм:

↗ проверка усл-я (3)

$x_i^{(1)}$	$i(x_i^{(1)})^2$	$i(x_i^{(1)}-1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i(x_i^{(2)})^2$	$i(x_i^{(2)}-1)^2$
4	16	9 $\geq 4 \Rightarrow j=1$	3 (j-1)	⑨ = min	4 < 9
3	18	8 (3) не вып.	3	18	8 < 9 $\Rightarrow$ (3) вып-ся
2	12	3	2	12	3 < 9
1 = l $\Leftarrow$	④ min	0	2 (l+1)	16	4 < 9

$\Rightarrow$

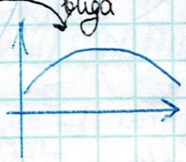
$\Longrightarrow x^* = (3, 3, 2, 2)$

Задача $\max\limits_{x \in M_0} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^0)$ (II) — непр. зад. распред. рес., где нас интересует суммарная эфф-ть. //Капитализм: max-ся Σрный эффект, хотя некоторые м.б. бедными//

Интерпретация: оптим. распред. капитала A; инвестор распределяет кап. по n пунктам; $f_i(x_i)$ — прибыль отложения в i-й пункт. Инвестор max-т сумм. прибыль от вложения капитала.

Предполож-е: $f_i(t)$ дифф-ма на $[0, A]$, не обязат. возр.

Такие (какие?) случаи встреч-ся, когда в роли $f_i(t)$ выступают ф-ции полезн-ти вида



//Очень богатый человек ⇒ много денег, но полезность убывает//

Т3.10 (Лемма Гиббса). ⌉ x^0 — опт. рас. рес. зад. (II). Тогда вып-ся след. необх. усл-е опт-ти:

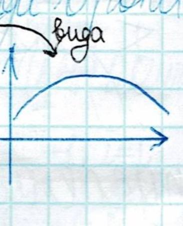
→ норма прибыли, if f_i' — величина прибыли

$$\exists A: \begin{cases} f_i'(x_i^0) = A, & x_i^0 > 0 \\ f_i'(x_i^0) \leq A, & x_i^0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

//принцип уравниван. д/произв-х//

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0)$ (II) –
нас интересует
м: max-ся Σрный
ии//
распред. капи-
ляет кап. по
ь отложения в
уми. прибыль

р-ма на [0,A],

, когда вроли
н-ти


л, но

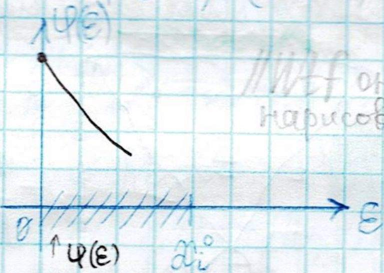
опт. рас. рес.
необх. усл-е $\overset{\text{опт-ти}}{?}$
ибыли
//принцип уравниван. д/произв-х//

∃ $f_i(t)$ вогнуты, то усл-е (1) – дост. усл-е опт-ти. ∃ $\overset{\to \text{наибол. } \|\cdot\| \text{ прибыли}}{f_1'(0)} \geqslant \dots \geqslant f_k'(0)$ и $f_i''(x) < 0$, $i=\overline{1,n}$, →существенное (контрпример: все ф-ции = м/собой и линейны)

тогда ∃ l: $\begin{cases} x_i^0 > 0, & i=\overline{1,l}, \\ x_i^0 = 0, & i=\overline{l+1,n} \end{cases}$ //вклад в 1ые l пунктов//

⇒ ∃ x^0 – опт. рас. рес. в зад. (II) $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ (1).

∃ i: $x_i^0 > 0$; $\forall j \neq i$ построим ф-цию $\varphi(\varepsilon)$, явл-ся вариацией д/ x^0: $\varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 - \varepsilon) + \sum_{k \neq i,j} f_k(x_k^0)$



//Wtf он нарисовал?//

необх. усл-е опт-ти:

$\varphi'(0) \leqslant 0$,

$\varphi'(0) = -f_i'(x_i^0) + f_j'(x_j^0) \leqslant 0$,

$f_j'(x_j^0) \leqslant f_i'(x_i^0)$ (2)

∃ $x_j > 0$, то $f_j'(x_j^0) \geqslant f_i'(x_i^0)$ (3)

(2) и (3) $\Longrightarrow f_j'(x_j^0) = f_i'(x_i^0) = \lambda \Longrightarrow$ (1) вып-но.

⇐ ∃ $f_i(t)$ вогнуты. Д-м, что (1) – усл. опт. $\overset{(?)}{\Longrightarrow}$ ⇒ x^0 – опт. рас. рес. зад. (II)

$\forall x \neq x^0$, $x \in M_0$. Д-м, что $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0) \leqslant 0$

$\sum f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0) = \sum_{i=1}^{n} [f_i(x_i) - f_i(x_i^0)] \leqslant$ //касательная лежит выше графика вогн. ф-ции//

$\sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i^0)(x_i - x_i^0) =$ | if $x_i^0 = 0$, то $x_i - x_i^0 \geqslant 0$, произв. огр-ся через λ; if $x_i^0 > 0$, то вместо произв. → λ | $\leqslant$

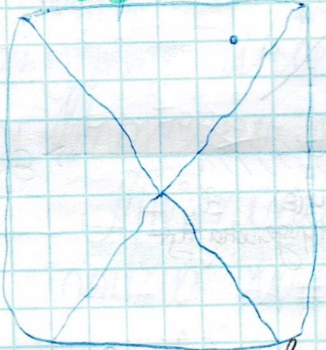
$\leq \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) = \lambda (A - A) = 0 \Rightarrow$ оп-ть док-на.

Д-м усл-е д/ производных. От противного: в опт. распр. рес. x^0 $\exists\, i : x_i^0 = 0,\ x_{i+1}^0 > 0$.

$f_i'(x_i^0) = f_i'(0) \overset{(1)}{\leq} \lambda \overset{(1)}{=} f_{i+1}'(x_{i+1}^0) < f_{i+1}'(0) \Rightarrow$ (!?) с тем, что производ. в 0 упорядочены и $(f_i'(0) \geq f_{i+1}'(0))$ ■

вогн. ф-ция в $0 \Rightarrow$ 1ая произв. строго убыв.

§19. Пример (Зад. поиска объекта)



Есть обл-ть, разбитая на п/обл-ти, в к осущ-ся поиск некого объекта. Время поиска огр. = A. If объект нах-ся в i-й обл-ти, то вер-ть условная его обнаруж-я $= 1 - e^{-\mu_i t}$ (if объект ищ-ся в теч-е времени t и он нах-ся в обл-ти i), $\mu_i > 0$ — величина зависит от размера обл-ти ($\mu_i \uparrow$, чем обл-ть

⅂ p_i — априорное распред. вер-ти, что объект нах-ся в i-й обл-ти: $p_i > 0$

⅂ $x = (x_1, \dots, x_n)$ — распред. времени

$= 0 \Rightarrow$ опт-ть док-на.

...дных. От против-

$\exists\, i : x_i^0 = 0,\ x_{i+1}^0 > 0.$

$...) < f'_{i+1}(0) \Rightarrow$ (!?) с

вогн. ф-ция в 0 ⇒ 1ая произв. строго убыв.

■

...объекта)

...обл-ть, разбитая

...-ти, в l осущ-ся

...кого объекта. Вре-

...ка огр. $= \mathcal{A}$. If

...-ся в i-й обл-ти,

...$= 1 - e^{-\mu_i t}$ (if

...ремени t и он

— величина зави-

...$\mu_i \uparrow$, чем обл-ть ↑)

...ред. вер-ти, что

...-ти: $p_i > 0$

...спред. времени

...иска (n — кол-во обл-тей), т.е. x_i — время, ...мы ищем объект в i-й обл-ти; $x \in M_0$. При этом max-ся $\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-\mu_i x_i})$ — пол-ная вер-ть обнаруж-я объекта — при $x \in M_0$.

Используем Л. Гиббса д/реш-я зад. ...с $f_i(t) = p_i(1 - e^{-\mu_i t})$. Проверим ...-цию на вогнут-ть: $f_i'(t) = p_i \mu_i e^{-\mu_i t}$ — убывает,

$\underline{f_i''(t) < 0} \Rightarrow$ действит. вогнут.

Без потери общ-ти, $f_1'(0) \geq \ldots \geq f_n'(0)$, ...$f_i'(0) = p_i \mu_i \Rightarrow \underline{p_1 \mu_1 \geq \ldots \geq p_n \mu_n}$.

Т.к. последнее усл-е Л.Г. вып-но, то ...определим усилия по 1ым l обл-тям.

...Выпишем усл-е (1): $\begin{cases} p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, \ i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^0 = \mathcal{A} \end{cases}$ // $l+1$ ур-е и неизв. // ($x_i^0, i = \overline{1,l}$ и λ)

Решаем с-му при $l = 1, 2, \ldots$; при этом ...смотрим, чтобы вып-сь

$$f_n'(0) \leq \ldots \leq f'_{l+1}(0) = \underbrace{p_{l+1} \mu_{l+1} \leq \lambda}_{\text{д/проверки 2го усл-я из (1)}} \Rightarrow$$

в этот момент будет оптим. распред. времени поиска

If $l = n$, то усл-е $\sqcup$ проверять не нужно.

Задача max-ции Σной эффект-ти в случае, ...ресурс дискретный: $\max\limits_{x \in M_0'} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^*)$ (II)'

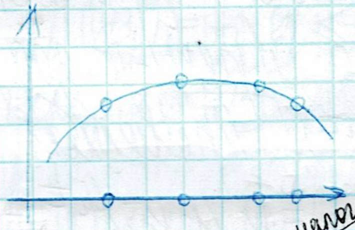
//fi-вогн.// → Потребуем, чтобы, if $\left[0<t<\theta,\ t\in\mathbb{Z}\right.$,

ф-ции дискрет. арг-та

$$\text{то } \underbrace{f_i(t)-f_i(t-1)}_{} \geqslant f_i(t+1)-f_i(t) \quad (2),$$

$$\left.\forall t\in(0,\theta),\ i=\overline{1,n}\right]$$

↓дискрет. аналог произв-й ф-ции, ↓ не возрастает с ростом (в силу ⩾ в (2))



аналог → //Касат. к графику вогнут. ф-ции лежит выше этого графика//

Лемма $\exists\, f_i(t)$ удовл. усл. (2). Тогда:

1) $\forall t>t_0 \Rightarrow f_i(t)-f_i(t_0) \leqslant \underbrace{\left(f_i(t_0+1)-f_i(t_0)\right)}_{\text{дискрет. производная}}(t-t_0)$;

2) $\forall t<t_0 \Rightarrow f_i(t)-f_i(t_0) \leqslant \underbrace{\left(f_i(t_0)-f_i(t_0-1)\right)}_{\text{соседная дискр. произв.}}(t-t_0)$

▲ 1) $\exists\, t>t_0$:

//Добавляем-вычитаем//

$$f_i(t)-f_i(t_0) = \overbrace{f_i(t)-f_i(t-1)}^{\text{разность...}} + \overbrace{f_i(t-1)-}^{\text{еще разн.}}$$

$$\overbrace{-f_i(t-2)}^{\text{разность...}} + \ldots + \overbrace{f_i(t_0+1)-f_i(t_0)}^{} \leqslant$$

← наиб. разность (с ростом t разности убыв.)

$$\leqslant \underbrace{\left(f_i(t_0+1)-f_i(t_0)\right)}_{\text{т.е. заменили все разности на max}} \underbrace{(t-t_0)}_{\text{кол-во таких разностей}}$$

Д-м д/ 2), умноженного на (−1)

$$2)\ \exists\, t<t_0:\ f_i(t_0)-f_i(t) = \overbrace{f_i(t_0)-f_i(t_0-1)}^{\text{наим. разность}} +$$

$$+\overbrace{f_i(t_0-1)-f_i(t_0-2)}^{} + \ldots + \overbrace{f_i(t+1)-f_i(t)}^{} \geqslant$$

$$\geqslant \underbrace{\left(f_i(t_0)-f_i(t_0-1)\right)}_{\text{т.е. заменили все разности на min}} \underbrace{(t_0-t)}_{\text{кол-во разностей}}$$

■

if $\left[0<t<\lambda, t\in\mathbb{Z},\right.$

$(t+1) - f_i(t)$ (2),

налог произв-й ф-ции,
зрастает с ростом (всегда $\ge$ в (2))

графику вогнут. ф-ции
ике этого графика//

вл. усл. (2). Тогда:

$\underbrace{f_i(t_0+1) - f_i(t_0)}(t-t_0);$

дискрет. производная

$\underbrace{f_i(t_0) - f_i(t_0-1)}(t-t_0)$

оседная дискр. произв. еще разн-

$\underbrace{(t-1)} + \overbrace{f_i(t-1) -}$

$- f_i(t_0) \le$ ← наиб. разность (с ростом t разности убыв.)

аких разностей
ах наим. разность

$= \overbrace{f_i(t_0) - f_i(t_0-1)} +$

$+ \overbrace{f_i(t+1) - f_i(t)} \ge$

$)$

зностей

■

Т3М (Необх. и дост. усл-е опт-ти в зад. (IV)'/ критерий Гросса). ⊐ x^* – опт. раб. рас. зад. (IV)' и вып-ны усл-я (2). Тогда д/ опт. рас. вып-ся след. н. и д. усл-я: if $x_j^*>0$, то

при полож. вложении дискр. произв.
[illegible]

$$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) \ge \overbrace{\max_{1\le i\le n}\left[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)\right]}^{=\lambda} \quad (3)$$

(3) – дискрет. принцип уравнивания дискрет. произв-х //

$$\underline{f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1)} \ge \lambda \ge \underline{f_j(x_j^*+1) - f_j(x_j^*)} \Rightarrow$$

→ max из разностей

дискрет. производ. близка к λ //

⇒ ⊐ x^* – оптим. рас. зад. (IV)' $\overset{?}{\Rightarrow}$ (3)

От противного: ⊐ ∃ $j: x_j^*>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) < \max_i\left[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)\right] =}$$

$$= \underline{f_l(x_l^*+1) - f_l(x_l^*)}$$

//Как раньше: из j-го пункта вычитаем 1, в l-й пункт добавляем 1//

$\Rightarrow$ новое расп. z:

$$z_i = \begin{cases} x_j^*-1, & i=j,\\ x_l^*+1, & i=l,\\ x_i^*, & i\ne j,l \end{cases}$$

Нер-во ⌴ перепишем как:

$$f_j(x_j^*) + f_l(x_l^*) < f_l(\underbrace{x_l^*+1}_{z_l}) + f_j(\underbrace{x_j^*-1}_{z_j}) \Rightarrow \text{(!?)}, \text{ т.к. } x^* \text{ – опт. рас.}$$

⇐ ⊐ д/ некот. x^* вып-но (3) $\overset{?}{\Rightarrow}$ x^* – опт. рас.

Возьмем $\forall x \ne x^*$, $x\in M_0'$. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \leq 0$$ // ⇒ x^* - оптим. рас. //

Д-м, что $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \vartheta(x_i - x_i^*)$ (н), $i = \overline{1, n}$. // Сложив все (н), справа будет 0, слева - что нам нужно

1) If $x_i > x_i^*$, то по Л., $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq$

$$\leq \Big(\underbrace{f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)}_{\leq \vartheta \text{ (из //…//)}}\Big)\underbrace{(x_i - x_i^*)}_{>0} \leq \vartheta(x_i - x_i^*) \Rightarrow$$

⇒ (н) док-но

2) If $x_i < x_i^* \Rightarrow x_i^* > 0$, то по Л.,

$$f_i(\overset{0\leq}{x_i}) - f_i(x_i^*) \leq \Big(\underbrace{f_i(x_i^*) - f_i(x_i^*-1)}_{\geq \vartheta \text{ (усл-е (3))}}\Big)\overbrace{(x_i - x_i^*)}^{<0} \leq$$

$\leq \vartheta(x_i - x_i^*) \Rightarrow$ (н) док-но. ▨

Алгоритм нахожд-я опт. рас. рес в задаче (П)''

Шаг 1: Начинаем с некот. произвол. распред. $x^{(1)}$, но д/быстрой сх-ти алгоритма берем реш-е непр. зад. (по Л. Г.) x^0, округляем, if есть нецелые компоненты, и получаем начал. распред. рес. $x^{(1)}$ — начал. приближ-е.

Шаг k: $x^{(k)}$; проверяем усл-е (3); if оно вып-но, то это оптим. распр.; if оно не вып-но, то $x_j^{(k)} > 0 \Rightarrow f_j(x_j^{(k)}) - f_j(x_j^{(k)} - 1) < \max\limits_{1 \leq i \leq n} [f_i(x_i^{(k)}+1) - f_i(x_i^{(k)})] =$

$\Rightarrow x^*$ - оптим. рас.//

$(x_i^*) \leqslant \mathcal{D}(x_i - x_i^*)$ (4),

удет 0, слева - что нам нужно//

$(x_i) - f_i(x_i^*) \leqslant$

$\underbrace{- x_i^*)}_{>0} \leqslant \mathcal{D}(x_i - x_i^*) \Rightarrow$

по $\underline{\mathcal{L}}$.,

$\underbrace{- f_i(x_i^* - 1)}_{\geqslant \mathcal{D} \text{ (усл-е (3))}} \overbrace{(x_i - x_i^*)}^{<0} \leqslant$ ▨

-я опт. рас. рес.

произвол. распред.

алгоритма берем

Т.) x^0, округляем,

ненты, и получаем

— начал. приближ-е.

е (3); if оно вып-но,

f оно не вып-но,

$x_j^{(k)} - 1) < \max\limits_{1\leq i\leq n} [f_i(x_i^{(k)} + 1) - f_i(x_i^{(k)})] =$

$= f_l(x_l^{(k)} + 1) - f_l(x_l^{(k)})$. Тогда определим -вое распред. рес.: $x^{(k+1)}$: $x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j, \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l, \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l \end{cases}$

Σ будет ↗//
ц-ия нового распред.

$f_j(x_j^{(k)}) + f_l(x_l^{(k)}) < f_j(x_j^{(k+1)}) + f_l(x_l^{(k+1)})$

Алгоритм сойдется, т.к. мн-во M_0' конечное $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ целевая ф-ция (наш крит.) будет ↗ $\Rightarrow$ обязательно (3) будет вып-но и найдется опт. рас. рес.

<u>Упр</u> ~~*~~ мб зад зад. на min: $\min\limits_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, где
ф-ции вып.// Сформ-ть н. и д. усл-е опт-ти (аналог К.Т.) + д/дискрет. случая (аналог крит. Гр.)

40

07/01: Господи, а мне может попасться лёгкий теор. вопрос, чтобы я получил н???

08/01, 10:50: Теор. вопрос №11 + решена зад. после билета №38. Что же у меня будет?